Questão 1

a) A seguir vemos o que acontece quando começamos com 3 no visor e apertamos as teclas na ordem **BBAB**:

$$3 \xrightarrow{B} 3+3=6 \xrightarrow{B} 6+3=9 \xrightarrow{A} 9^2=81 \xrightarrow{B} 81+3=84\,.$$

Logo o número que vai aparecer no visor é 84.

b) Uma maneira é apertar as teclas na ordem **BBABB**, como vemos a seguir:

$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{B} 7 \xrightarrow{A} 49 \xrightarrow{B} 52 \xrightarrow{B} 55$$

Outra maneira é apertar a tecla **B** dezoito vezes seguidas; ainda outra é **BA** seguida de treze **B**'s.

c) *1ª solução:* Se o número que aparece no visor após apertar as teclas **A** e **B** algumas vezes não é um quadrado perfeito, a última tecla apertada foi necessariamente a tecla **B**. Desse modo, se o 54 aparece no visor, podemos reconstruir parcialmente a sequência das teclas apertadas até chegar a 54:

$$36 \xrightarrow{B} 39 \xrightarrow{B} 42 \xrightarrow{B} 45 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{B} 51 \xrightarrow{B} 54$$

Chegamos a 36, que é um quadrado perfeito. Aqui temos as possibilidades

$$0 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 36$$

e

$$9 \xrightarrow{B} 12 \xrightarrow{B} 15 \xrightarrow{B} 18 \xrightarrow{B} 21 \xrightarrow{B} 24 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{B} 30 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{B} 36\,.$$

Como 9 é um quadrado perfeito, essa última sequência nos dá também duas possibilidades, a saber,

$$0 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{B} 9$$

e

$$0 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 9\,.$$

Vemos assim que é possível chegar a 54 a partir de 0 e 3, mas não a partir de 2.

2ª solução: Se um número inteiro x não é múltiplo de 3 então:

- $x+3$ não é múltiplo de 3. De fato, se $x+3$ fosse múltiplo de 3, poderíamos escrever $x+3=3y$ para algum inteiro y e então $x=3y-3=3(y-1)$ seria múltiplo de 3, absurdo.
- x^2 não é múltiplo de 3. De fato, os fatores primos de x e x^2 são os mesmos; assim, se 3 não é fator primo de x então também não será fator primo de x^2.

Assim, começando com um número que não é múltiplo de 3 no visor, não é possível chegar a um múltiplo de 3 apertando as teclas **A** e **B**. Como 2 não é múltiplo de 3 e $54 = 3\times 18$ é múltiplo de 3, concluimos que não se pode chegar a 54 a partir do 2.

3ª solução: Vamos tentar chegar a 54 a partir do 2. Como $54-2=52$ não é múltiplo de 3, vemos que não é possível usar apenas a tecla **B**, ou seja, a tecla **A** deve ser usada pelo menos uma vez. Por outro lado, como $8^2=64>54$, a tecla *A* só pode ser usada em números menores ou iguais a 7. Os números obtidos a partir do 2 que são menores ou iguais a 7 são 2, $4=2^2$, $5=2+3$ e $7=2^2+3$; seus quadrados são 4,16, 25 e 49. A partir de 16, 25 e 49 não podemos usar a tecla **A** outra vez, e como nenhum desses números difere de 54 por um múltiplo de 3, vemos que a partir deles não é possível chegar a 54; o mesmo argumento se aplica ao 4 e a seu quadrado 16. Logo não é possível obter 54 a partir do 2.

4ª solução: Notamos primeiro que começando do 2 e apertando apenas duas teclas quaisquer, o maior resultado possível é 24 (sequência **BA**), ou seja, não se chega ao 54. Vamos agora ver o que acontece quando o 2 está no visor e apertamos três teclas.

Seqüência de teclas	Resultado
AAA	256
AAB	19
ABA	49
BAA	125
ABB	10
BAB	28
BBA	64
BBB	11

Podemos eliminar as seqüências **AAA**, **BAA** e **BBA** de nossas considerações, pois elas levam a resultados maiores que 54. Para chegar ao 54 a partir dos resultados das outras seqüências, não podemos usar a tecla **A**, pois isso nos daria resultados maiores que 54. Por outro lado, a diferença entre 54 e qualquer dos números 19, 49, 10, 28 e 11 não é um múltiplo de 3, ou seja, também não podemos chegar ao 54 a partir desses números apenas com a tecla **B**. Logo não é possível chegar ao 54 a partir do 2.

5ª solução: Se um número x não é múltiplo de 3 então $x + 3$ não é múltiplo de 3. O quadrado de x também não é múltiplo de 3, pois os fatores primos de x^2 são os mesmos de x. Daí, como 2 não é múltiplo de 3, usando as teclas A e B sucessivas vezes o número do visor nunca será múltiplo de 3. Como $54 = 3\times18$ é múltiplo de 3, segue-se que não é possível obtê-lo a partir do 2, usando apenas as teclas A e B.

Questão 2

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2\times 45 = 90$. Logo a soma que está faltando é $90-(9+13+14+17+18)=90-71=19$.

b) *1ª solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª solução: Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1,3,5,7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5=2+3=1+1+3=1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado.

O seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7,16, 22 e 13,14,18; podemos então supor que as somas das linhas são 7,16,22 e as somas das colunas são 13,14,18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

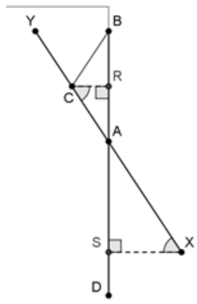
1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas , (troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

Questão 3

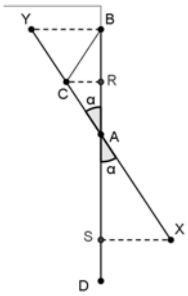


a) *1ª solução:* Na figura ao lado temos $XS = 0{,}2$ e queremos achar *CR*. Notamos que os ângulos indicados na figura com vértices em *C* e *X* são iguais, pois são determinados pelas paralelas *CR* e XS e pela transversal *XY*. Logo os triângulos retângulos *ARC* e *ASX* são semelhantes e temos

$$\frac{CR}{XS} = \frac{AC}{AX}$$

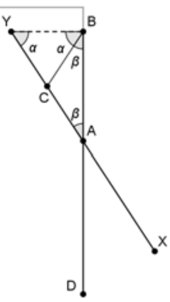
ou seja,

$$CR = XS \times \frac{AC}{AX} = 0{,}2 \times \frac{0{,}5}{1} = 0{,}1.$$

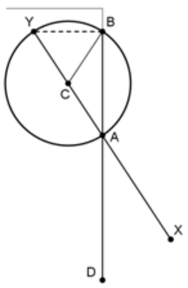


Podemos também argumentar como segue. A razão de semelhança entre os triângulos *ARC e ASX* é igual a $\frac{AC}{Ax} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$; como os segmentos *CR* e *XS* são correspondentes, segue que o comprimento de *CR* é a metade do comprimento de *AX*, ou seja, é igual a $0{,}1$m.

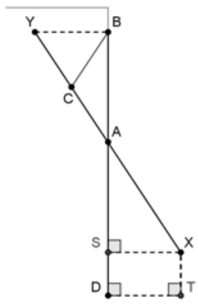
2ª solução: Denotemos por α o ângulo $\widehat{DAX}$, como na figura à esquerda. Como $\widehat{DAX}$ e $\widehat{BAY}$ são opostos pelos vértices, temos também $\widehat{BAY} = \alpha$. Nos triângulos retângulos *ASX* e *ARC*, temos $XS = AX \cdot \text{sen}\,\alpha = 2\text{sen}\,\alpha$ e $CR = AC \cdot \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha$. Logo $CR = \frac{1}{2} XS = 0{,}1$m.



b) *1ª solução:* Como $AC = BC = YC$ os triângulos *ACB* e *BCY* são isósceles; podemos então marcar os ângulos α e β como na figura à direita. A soma dos ângulos do triângulo *ABY* é $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$; donde $\alpha + \beta = 90^\circ$. Logo *BY* é perpendicular ao trilho *BD*, ou seja, *BY* é horizontal qualquer que seja a posição de *Y*.



2ª solução: Como $AC = BC = YC$, podemos traçar um círculo com centro *C* e passando por *A*, *B* e *Y*, como na figura à esquerda. Como os pontos *A*, *C* e *Y* estão alinhados, o segmento *AY* é um diâmetro desse círculo. Logo o ângulo $\widehat{ABY}$ está inscrito no semicírculo, donde sua medida é 90°; com antes, segue que *BY* é horizontal qualquer que seja a posição de *Y*.



c) Na figura à direita, queremos calcular *DT* quando $XT = 0{,}4$. Para isso, notamos primeiro que, quando a porta se fecha, *XY* coincide com *BD*; logo

$$BD = XY = XA + AC + CY = 1 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2.$$

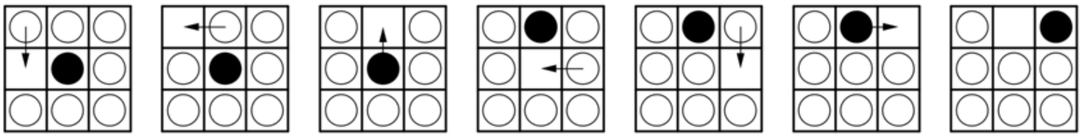
Como *DSTX* é um retângulo, temos $SD = XT = 0{,}4$ e segue que $BS = BD - SD = 2 - 0{,}4 = 1{,}6$. Por outro lado, os triângulos *ASX* e *ABY* são congruentes; de fato, eles são ambos retângulos, seus ângulos em *X* e *Y* são iguais (como no item a)) e $AX = AY$. Logo $AS = AB$ e como $BS = 1{,}6$ segue que $AS = 0{,}8$. O teorema de Pitágoras nos diz então que

$$SX = \sqrt{AX^2 - AS^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

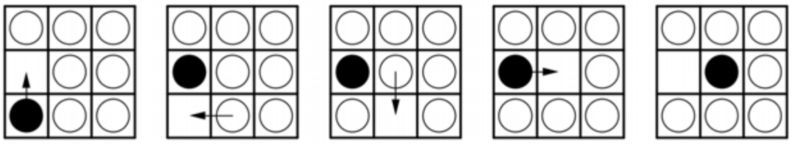
e concluímos que $DT = 0{,}6$ m.

Questão 4

a) A figura abaixo mostra que a sequência de seis movimentos $(\downarrow, \leftarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ termina o jogo a partir da posição inicial dada.

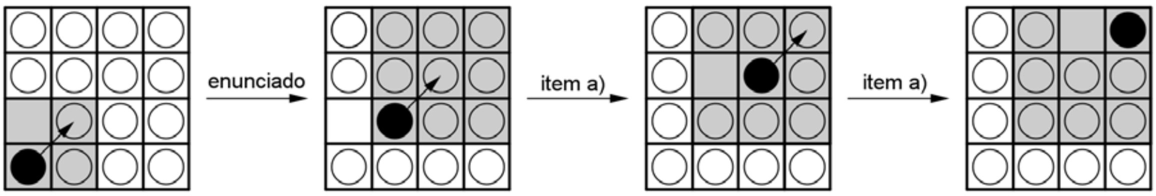


b) A figura abaixo mostra que a sequência de quatro movimentos $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ transforma a posição inicial dada na posição inicial do item a), a partir da qual é possível terminar o jogo em seis movimentos.



Assim, podemos terminar o jogo num total de $4+6=10$ movimentos.

c) A idéia é fazer a peça preta se mover ao longo da diagonal do tabuleiro. Isso pode ser feito uma casa de cada vez usando primeiro os movimentos do exemplo do enunciado seguidos da repetição dos movimentos do item a). Ilustramos isso abaixo em um tabuleiro 4×4.



Em geral, em um tabuleiro $n \times n$ a peça preta vai subir $n-1$ casas na diagonal; pelo método indicado, pode-se subir a primeira delas em 4 movimentos e cada uma das $n-2$ restantes em 6 movimentos cada uma. Logo pode-se acabar o jogo em $4+6(n-2)=6n-8$ movimentos.

Questão 5

a) Para André ganhar o livro ele deve retirar a bola preta. Como a caixa contém quatro bolas das quais apenas uma é preta, a probabilidade de ele retirar a bola preta é $\frac{1}{4}$. Outra solução aparece na *2ª solução* do item b).

b) *1ª solução:* Para Dalva ganhar o livro, André, Bianca e Carlos devem retirar bolas brancas. Como inicialmente a caixa contém 3 bolas brancas, a probabilidade de André retirar uma bola branca é $\frac{3}{4}$. Supondo que André tire uma bola branca, sobrarão na caixa 2 bolas brancas e 1 preta; assim, a probabilidade de Bianca tirar uma bola branca é $\frac{2}{3}$. Do mesmo modo, se André e Bianca tirarem bolas brancas, a probabilidade de Carlos tirar uma bola branca será $\frac{1}{2}$. Assim, a probabilidade de André, Carlos e Bianca tirarem bolas brancas é $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, que é a probabilidade de Dalva ganhar o livro. Raciocínio semelhante mostra que a probabilidade de qualquer um dos amigos ganhar o livro é $\frac{1}{4}$, ou seja, o sorteio é justo e a ordem em que eles retiram as bolas não tem importância. Para entender melhor isso, vejamos outra solução.

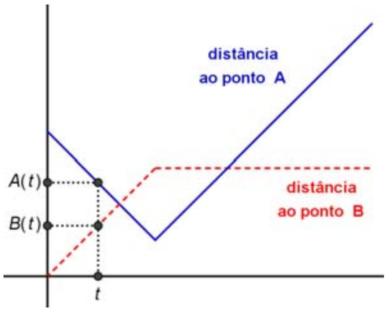
2ª solução: Mantendo as regras do sorteio, vamos pintar uma bola branca de azul e outra de vermelho; temos então quatro bolas diferentes na caixa. O número de sorteios possíveis passa a ser $4\times3\times2\times1=24$; desses, Dalva ganha o livro quando André, Bianca e Carlos ficam com as bolas branca, azul e vermelha, o que pode acontecer de $3\times2\times1=6$ maneiras diferentes. Logo a probabilidade de Dalva ganhar o livro é $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. Esse raciocínio se aplica a qualquer um dos amigos, justificando assim o comentário anterior sobre a justiça do sorteio.

c) *1ª solução:* André pode ganhar o livro de duas maneiras, a saber, quando a primeira bola retirada for preta ou então quando as quatro primeiras bolas retiradas forem brancas e a quinta preta. A probabilidade no primeiro caso é $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ e no segundo é $\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{28}$. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{1}{4}+\frac{3}{28}=\frac{5}{14}$.

2ª solução: A probabilidade de que André ganhe o livro na primeira rodada, como visto acima, é $\frac{1}{4}$. Para calcular a probabilidade de que ele ganhe o livro na segunda rodada, vamos calcular os casos possíveis e os casos favoráveis. As primeiras cinco bolas podem ser sorteadas de $8\times7\times6\times5\times4$ maneiras. Para que André ganhe o livro na quinta bola, as quatro primeiras bolas devem ser brancas e a quinta preta, o que pode ocorrer de $6\times5\times4\times3\times2$ maneiras. Logo, a probabilidade de que André ganhe o livro na quinta bola sorteada é $\frac{6\times5\times4\times3\times2}{8\times7\times6\times5\times4}=\frac{3}{28}$. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{1}{4}+\frac{3}{28}=\frac{5}{14}$.

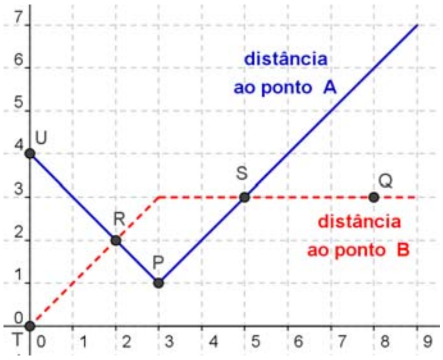
d) *1ª solução:* Dalva só vai ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta; de fato, se as quatro primeiras bolas sorteadas forem brancas, sobrarão na caixa duas brancas e duas pretas e uma bola preta será retirada antes que chegue sua vez. Assim, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{7}=\frac{2}{14}$. Fica como exercício mostrar que as probabilidades de Bianca e Carlos ganharem o livro são, respectivamente, $\frac{4}{14}$ e $\frac{3}{14}$. O André foi bem esperto em propor esse novo sorteio! (*observação:* escrevemos todas as probabilidades como frações com o mesmo denominador para compará-las mais rapidamente e também para facilitar a verificação de que a soma de todas é igual a 1.)

2ª Solução: Dalva só pode ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta. As quatro primeiras bolas podem ser sorteadas de $8\times7\times6\times5$ modos. Para que Dalva ganhe o livro, as três primeiras devem ser brancas e a quarta preta, o que pode ocorrer de $6\times5\times4\times2$ modos. Logo, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6\times5\times4\times2}{8\times7\times6\times5}=\frac{1}{7}$.



Questão 6

Vamos denotar a distância da formiguinha a **A** e **B** no instante *t* por $A(t)$ e $B(t)$, respectivamente, como à esquerda. No gráfico abaixo, o ponto mostra que $A(3) = 1$ e o ponto *Q* mostra que $B(8) = 3$.

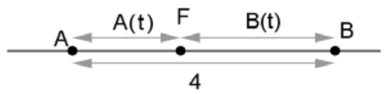


a) Os pontos *R* e *S*, onde os gráficos se cruzam, correspondem aos instantes *t* nos quais $A(t) = B(t)$, ou seja, quando a formiguinha se encontrava à mesma distância dos pontos A e B. Em *R* temos $t = 2$ e $A(2) = B(2) = 2$; em *S* temos $t = 5$ e $A(5) = B(5) = 3$.

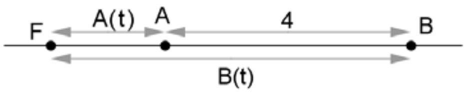
b) Os pontos *T* e *U* mostram que $B(0) = 0$ e $A(0) = 4$, ou seja, em $t = 0$ a formiguinha se encontrava sobre **B** e à distância 4 de **A**. Logo a distância entre **A** e **B** é 4.

c) Quando a formiguinha **F** estava na reta que passa por **A** e **B**, uma das três possibilidades a seguir deve ter ocorrido:

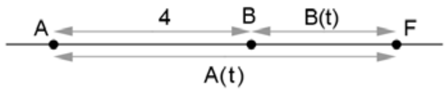
1. **F** estava entre **A** e **B**, ou seja, $A(t) + B(t) = 4$



2. **A** estava entre **F** e **B**, ou seja, $B(t) - A(t) = 4$



3. **B** estava entre **A** e **F**, ou seja, $A(t) - B(t) = 4$



No gráfico vemos que a primeira possibilidade ocorreu no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 3$; a segunda possibilidade não ocorreu e a terceira ocorreu apenas no instante $t = 9$.

d) Como vimos no item anterior, de $t = 0$ até $t = 3$ a formiguinha partiu de **B** e se moveu ao longo do segmento **AB**. Nesse trajeto $A(t)$ decresce, ou seja, a formiguinha se aproximou de **A** até chegar a um ponto que dista 1 de **A** e 3 de **B**. Entre $t = 3$ e $t = 9$ o gráfico mostra que $B(t) = \text{constante} = 3$, ou seja, a formiguinha andou ao longo de um arco de círculo de centro **B** e raio 3. Finalmente, em $t = 9$ a formiguinha voltou à reta **AB**, dessa vez em um ponto que dista 7 de **A** e 3 de **B**. Na figura ilustramos esse trajeto, com as posições da formiguinha em instantes especiais. Assim, a formiguinha percorreu um segmento de comprimento 3 seguido de um semicírculo de raio 3; o comprimento desse trajeto é $3 + 3\pi$.