Nível 3 questão 1

a) O número de cartões na caixa é a soma dos números inteiros de 1 a 10, isto é, $1+2+3+\cdots+9+10=55$.

b) Basta escolher o cartão de número 1 e depois dois cartões de cada um dos números de 2 a 10. No total, teremos $1+2\times 9=19$ cartões, sem que haja três com o mesmo número.

c) Primeiro notamos que escolhendo o cartão de número 1, os dois de número 2, os três de número 3 e depois quatro de cada um dos números de 4 a 10, teremos um total de $1+2+3+4\times 7=34$ cartões sem que cinco quaisquer tenham o mesmo número. Logo, para que tenhamos certeza que cinco cartões têm o mesmo número, é necessário escolher pelo menos 35 cartões.

Por outro lado, se escolhermos 35 cartões, podemos afirmar que pelo menos cinco deles terão o mesmo número. De fato, se isto não fosse verdadeiro, teríamos no máximo 4 cartões de cada número. Como há apenas um cartão como número 1, dois com o 2 e três com o 3, teríamos retirado no máximo $1+2+3+4\times 7=34$ cartões, o que é uma contradição. Concluímos que entre 35 cartões há, necessariamente, pelo menos cinco com o mesmo número.

Nível 3 questão 2

a) Lembrando que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, podemos simplificar a expressão $(3x+1)^2+(4x+2)^2-(5x+2)^2$ como segue:

$$(3x+1)^2+(4x+2)^2-(5x+2)^2=9x^2+6x+1+16x^2+16x+4-25x^2-20x-4$$
$$=(9+16-25)x^2+(6+16-20)x+(1+4-4)=2x+1.$$

b) Aqui temos

$$(3x-m)^2+(4x-n)^2-(5x-5)^2=-(6m+8n-50)x+(m^2+n^2-25)=2x$$

e desse modo devemos encontrar inteiros m e n tais que $m^2+n^2-25=0$ e $-(6m+8n-50)=2$, isto é, $m^2+n^2=25$ e $3m+4n=24$. A primeira equação (que também pode ser obtida pela substituição $x=0$ na identidade) tem as possíveis soluções em números inteiros:

m	0	± 3	± 4	± 5
n	± 5	± 4	± 3	0

Verificação direta mostra que apenas os valores $m=4$ e $n=3$ satisfazem a segunda equação.

c) Do enunciado temos $4^2+7^2-8^2=1$. Multiplicando esta expressão por 2^2, obtemos $2^2\cdot 4^2+2^2\cdot 7^2-2^2\,8^2=4$, ou seja, $8^2+14^2-16^2=4$, o que mostra que 4 é simpático. Outras expressões são $4=5^2+10^2-11^2=6^2+7^2-9^2=7^2+22^2-23^2$ e, mais geralmente, $4=(3k+4)^2+(4k+2)^2-(5k+4)^2$ para $k>2$.

d) Vamos dividir o argumento para números ímpares e pares.

Números ímpares: seja $n=2k+1$ um número ímpar maior que 1, ou seja, com $k>0$. O item (a) mostra que fazendo $a=3k+1$, $b=4k+2$ e $c=5k+2$ temos $n=a^2+b^2-c^2$. Notamos que $a<b<c$ segue de $k>0$. Como já sabemos que 1 é simpático, segue que todo número ímpar positivo é simpático.

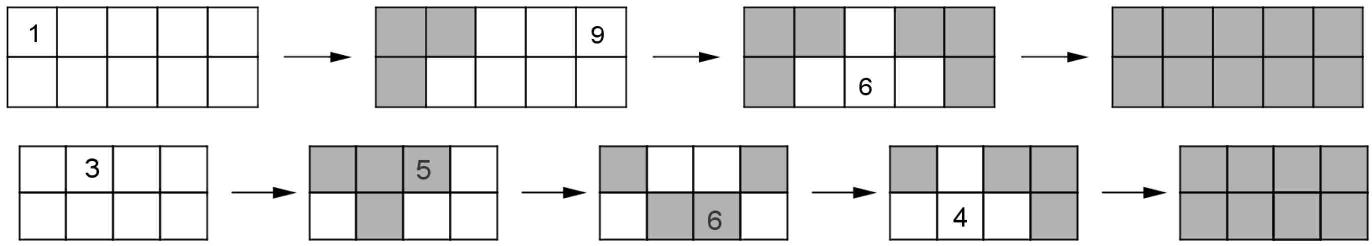
Números pares: seja $n=2k$ um número par maior que 4, ou seja, com $k>2$. Aqui o item (b) mostra que fazendo $a=3k-4$, $b=4k-3$ e $c=5k-5$ temos $n=a^2+b^2-c^2$. Notamos que $a<b<c$; de fato, $a<b$ vem do fato de k ser positivo e $b<c$ decorre de $k>2$. Como já sabemos que 2 e 4 são simpáticos, segue que todo número par positivo é simpático. Concluímos então que todos os inteiros positivos são simpáticos.

Uma curiosidade aqui é uma fórmula geral (entre outras) que mostra que todo número positivo n é simpático:

$$n=(n+3)^2+\left(\frac{n^2+5n+8}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2+5n+8}{2}+1\right)^2.$$

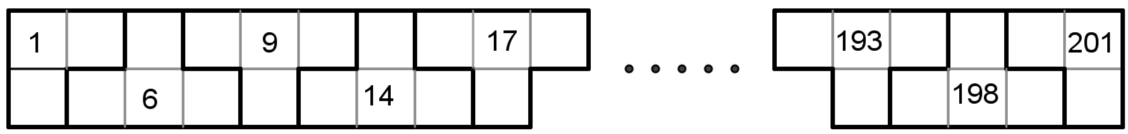
Nível 3 questão 3

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornarmos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item (a); notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.

c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas 1, 9, 17,... , 193, 201 e na segunda as casas 6, 14, 22,..., 190, 198. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.

d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50\times4=200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.

Observação: A solução dos itens (b) e (c) mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2\times n$, onde *n* deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).

Nível 3 questão 4

a) O número total de partidas disputadas no torneio é $3+2+1=6$. Como 6 não é divisível por 4, o torneio não pode acabar com os quatro times tendo o mesmo número de vitórias.

b) *1ª solução:* Para que o Quixajuba termine isolado em primeiro lugar, ele deve ganhar todas as suas partidas. De fato, se ele ganhar duas ou menos então os outros três times dividirão pelo menos quatro vitórias entre si, e assim algum deles deve ter pelo menos duas vitórias; nesse caso, o Quixajuba não seria o campeão isolado. Para cada um dos três jogos entre os outros times há duas possibilidades. Logo, o número de maneiras do Quixajuba terminar sozinho em primeiro lugar é $1\times1\times1\times2\times2\times2=8$. Como há $2^6=64$ resultados possíveis para as seis partidas, a probabilidade de o Quixajuba ser o campeão isolado é $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.

2ª solução: Argumentamos como acima que o Quixajuba será o campeão isolado se e somente se ele vencer suas três partidas. Como a probabilidade de o Quixajuba ganhar um jogo contra qualquer dos outros times é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de ele ganhar suas três partidas é $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

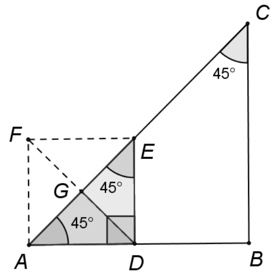
c) Suponhamos que os times sejam A, B, C e D e que o torneio termine com D isolado em último lugar. Então D perdeu todas suas partidas; de fato,

- se D tivesse ganho suas três partidas, teria terminado o torneio em primeiro lugar (como vimos no item anterior);
- se oD tivesse ganho duas (ou uma) partidas, os outros times dividiriam quatro (ou cinco) vitórias entre si; neste caso, pelo menos um deles teria ganho no máximo uma partida e assim D não teria ficado em último lugar isolado.

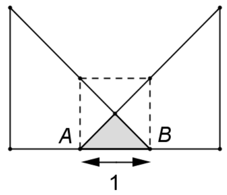
Logo A, B e C dividem entre si as seis vitórias, ou seja, cada um deles ganhou duas vezes; uma contra D e uma contra um dos outros. Para as partidas entre A, B e C temos apenas duas possibilidades: A ganhou de B que ganhou de C ou A ganhou de C que ganhou de B. Em resumo, há apenas duas possibilidades para que A, B e C dividam a liderança, e neste caso D acaba o torneio em último lugar isolado.

Como qualquer um dos times pode acabar em último lugar isolado, enquanto os outros dividem a liderança, segue que o número de possibilidades para que isto aconteça é $4\times 2=8$. Por outro lado, o número total de possibilidades para os resultados das seis partidas é $2^6=64$. Logo a probabilidade de que três times dividam a liderança é $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.

Nível 3 questão 5

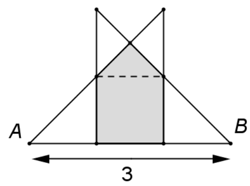


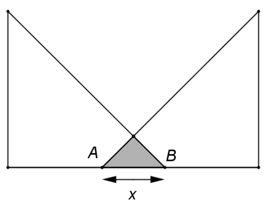
O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado ao lado. O triângulo *ABC* é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado, e *D* é um ponto qualquer no lado *AB*. Fazendo *DE* perpendicular a *AB*, o triângulo *ADE* também é retângulo de lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado *ADEF*; a área do triângulo *ADG* é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado *ADEF*.



a) Quando $x=1$, a figura formada pela formado pela sobreposição dos triângulos maiores é um triângulo menor, indicado em cinza na figura à esquerda. A observação acima mostra que sua área é a quarta parte da área de um quadrado de lado 1, isto é, $f(1)=\frac{1}{4}$.

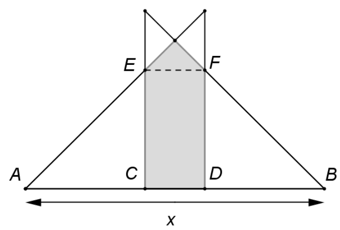
Quando $x=3$, a figura formada pela sobreposição dos dois triângulos é um pentágono, como na figura à direita. Como os triângulos têm catetos de medida 2 e $AB=3$, vemos que os catetos se sobrepõem em um segmento de medida 1. Logo o pentágono é a união de um quadrado de lado 1 e um triângulo idêntico ao que consideramos no início desta questão. Logo $f(3)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.





b) Para valores de *x* tais que $0\le x\le 2$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é o triângulo em cinza à esquerda, donde $f(x)=\frac{x^2}{4}$ para $0\le x\le 2$, conforme observação inicial. Quando $2<x\le 4$, a figura é um pentágono, como ilustrado à direita. Temos então $AC+CD=2=BD+CD$, donde

$$4=\underbrace{AC+BD+CD}_{x}+CD=x+CD,$$



ou seja, $CD=4-x$; logo $AC=BD=2-(4-x)=x-2$. Vemos assim que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo *CDFE* de base $4-x$ e altura

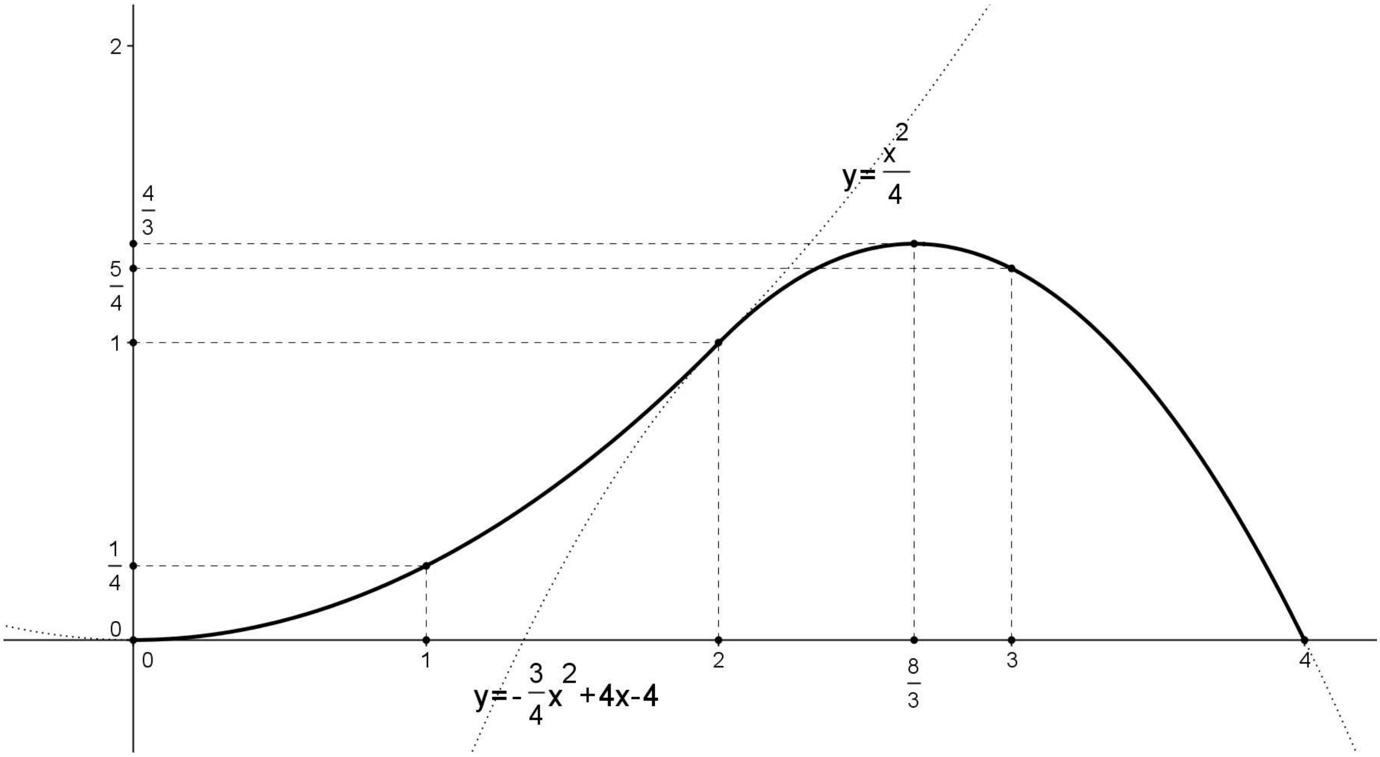
$CE = AC = x - 2$ e um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $4 - x$. Segue que para $2 < x \le 4$ temos

$$f(x) = \underbrace{(4-x)(x-2)}_{\text{área do retângulo}} + \underbrace{\frac{(4-x)^2}{4}}_{\text{área do triângulo}} = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4.$$

Notamos que esta última expressão também assume o valor 1 para $x = 2$. Em resumo, temos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4 \text{ se } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Notamos também que $f(4) = 0$ (como era de se esperar). O gráfico de *f* está esboçado a seguir; nele marcamos os valores calculados no item anterior, bem como outros valores importantes para a resolução do item (c).



c) A observação direta do gráfico mostra que o valor máximo da função no intervalo $[0,2]$ é $f(2) = 1$. Resta analisar a função no intervalo $[2,4]$. Esquecendo por um momento que estamos neste intervalo, vamos considerar a função quadrática $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$ definida para todo número real *x*; ela é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a = -\frac{3}{4}$, $b = 4$ e $c = -4$. Como $a < 0$, ela assume um valor máximo para $x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{3}$ e seu valor neste ponto é $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4}{3}$ (podemos também calcular diretamente $g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$). Uma vez que $\frac{8}{3}$ pertence ao intervalo $[2,4]$, segue que o máximo de *f* neste intervalo é $\frac{4}{3}$, e como $\frac{4}{3} > 1$ concluímos que este é o valor máximo de *f* no intervalo $[0,4]$.

Nível 3 questão 6

Para facilitar a exposição, vamos denotar por A' a posição do ponto A após a segunda dobra.

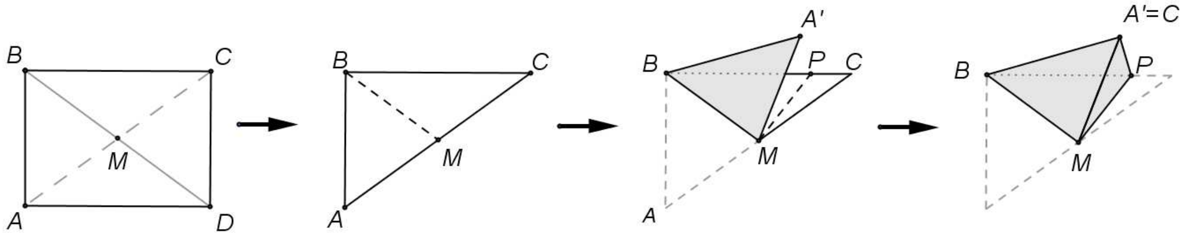


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) A figura 4 mostra que $A'\widehat{M}P = C\widehat{M}P$ (ou seja, P foi escolhido de modo que MP é a bissetriz de $A\widehat{M}C$), e segue que $A'\widehat{M}C = 2\cdot A'\widehat{M}P$ (conforme figura 3). Por outro lado, temos $A\widehat{M}B = A'\widehat{M}B$, donde $A\widehat{M}A' = 2\cdot A'\widehat{M}B$. Logo

$$180^\circ = A\widehat{M}A' + A'\widehat{M}C = 2\cdot A'\widehat{M}B + 2\cdot A'\widehat{M}P = 2(A'\widehat{M}B + A'\widehat{M}P) = 2\cdot B\widehat{M}P$$

e segue que $B\widehat{M}P = 90^\circ$.

b) (figura 1) Lembramos que as diagonais de um retângulo são iguais e se interceptam em seu ponto médio; no nosso caso, temos $BM = AM = CM$. Segue que o triângulo BMC é isósceles e concluímos que $M\hat{B}C = M\hat{C}B = A\hat{C}B$. Logo os triângulos retângulos ABC e PMB têm um ângulo (agudo) em comum, ou seja, eles são semelhantes.

Aqui fazemos um reparo ao enunciado deste item na prova. Em geral, ao falar da semelhança de triângulos, deve-se listar os vértices na ordem que indica a correspondência correta. No nosso caso, o enunciado deveria ser "mostre que os triângulos *PMB* e *ABC* são semelhantes", de vez que os ângulos em *M* e *B* do triângulo *PMB* são iguais aos ângulos em *B* e *C* do triângulo *ABC*, respectivamente. O Comitê de Provas pede desculpas por esta incorreção.

c) Como os triângulos *PMB* e *ABC* são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre lados correspondentes. Como vimos acima, temos $BM = AM = CM$, ou seja, $BM = \frac{1}{2}AC$. Por outro lado, o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC* (figura 1) nos dá $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$; logo $BM = 10$, e segue que a razão de semelhança dos triângulos *BMP* e *ABC* é $\frac{BM}{BC} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. Denotando a área do triângulo *BMP* por (BMP) (e similarmente para outras figuras a seguir) temos $(BMP) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 (ABC) = \frac{25}{64} \times \frac{12 \times 16}{2} = \frac{75}{2}$

d)Desdobrando a figura 4, segue que $(A'BMP) + (BMP) = (ABC)$. Logo

$$(A'BMP) = (ABC) - (BMP) = 96 - \frac{75}{2} = \frac{117}{2}.$$