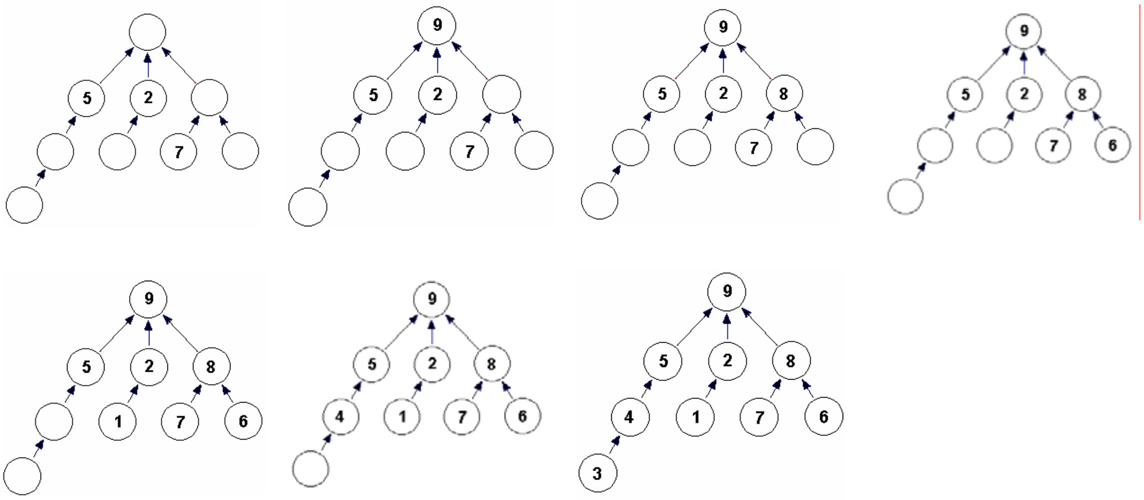
OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 3

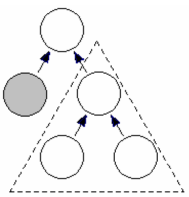
QUESTÃO 1

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

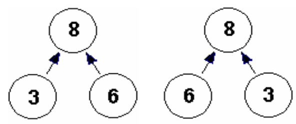
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A seqüência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.





b) *1ª solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

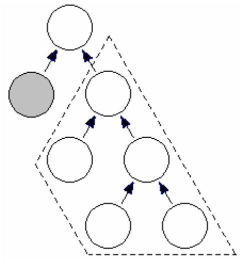
- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4\times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.



c) *1ª solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

- preenchemos o círculo do topo com o 7**:** 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6**:** 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

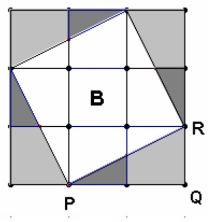
- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 2

Para facilitar a escrita desta solução, vamos nos referir aos pontos do quadriculado como pontos legais.

a) Observando a figura ao lado, vemos que o quadrado B pode ser inscrito em um quadrado que consiste de 9 quadradinhos. A parte fora do quadrado B pode ser decomposta em quatro triângulos iguais (em cinza claro). Cada triângulo é a metade de um retângulo feito de dois quadradinhos; a área de cada um desses triângulos é então igual a 1 cm^2. Logo a área do quadrado B é $9-4=5\,\text{cm}^2$. Podemos também argumentar que o quadrado B foi decomposto em um quadradinho e quatro triângulos de área 1 cm^2, donde sua área é $1+4=5$ cm^2.

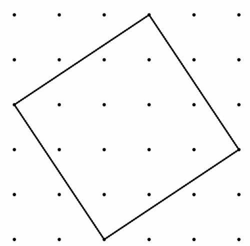


Alternativamente, podemos calcular o lado *PR* do quadrado observando o triângulo retângulo *PQR* na figura. Seus catetos são *PQ* e *QR*, de medidas 1 e 2, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$PR^2=\sqrt{PQ^2+QR^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

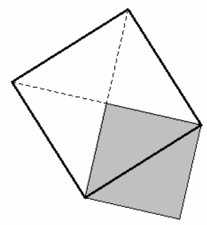
e segue que a área do quadrado é $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ cm^2.

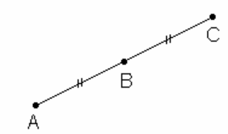
b) Queremos desenhar um quadrado legal de área 13 cm^2; seu lado deve então medir $\sqrt{13}$ cm. Observando a segunda solução apresentada no item (a), vemos que o lado deve ser a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos *a* e *b* que são números inteiros e tais que $a^2+b^2=13$. Podemos então escolher $a=3$ e $b=2$ (a única solução, a menos de trocar os valores de *a* e *b*) e construir nosso quadrado de área 13 cm^2 como, por exemplo, indicado na figura ao lado.



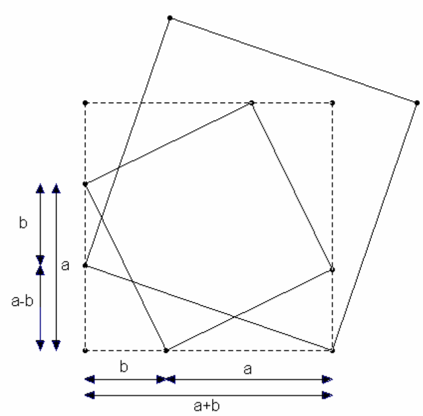
c) Se existe um quadrado legal de área *n*, então seu lado é $\sqrt{n}$; para construir um segmento deste comprimento devemos, como no item anterior, encontrar inteiros *a* e *b* tais que $a^2+b^2=n$. Para 41 não há problema, pois $41=4^2+5^2$; mas para 43 isto é impossível, como se pode ver por listagem direta. De fato, como $7^2=49$ ultrapassa 43, devemos testar apenas se 43 se escreve como soma de dois quadrados dos números de 1 a 6, o que não acontece pois $43-1^2=42$, $43-2^2=39$, $43-3^2=34$, $43-4^2=27$, $43-5^2=18$ e $43-6^2=7$ não são quadrados perfeitos. Logo é possível construir um quadrado legal de área 41 cm^2, mas não é possível construir um de área 43 cm^2.

d) *1ª solução*: A figura à direita mostra um quadrado legal em cinza e a construção de um novo quadrado, em traço mais grosso, de área igual ao dobro da área do quadrado original. Notamos que como os vértices do quadrado original são pontos legais então os vértices do quadrado maior também são pontos legais. Para justificar esta última afirmativa, basta notar que se *A* e *B* são pontos legais e *C* é o simétrico de A com relação a *B* (como na figura à esquerda) então *C* também é um ponto legal. Desse modo, o novo quadrado também é legal.

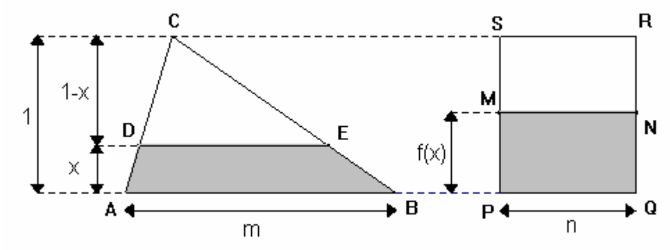




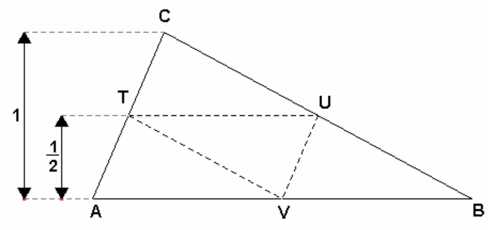
2ª solução: Como vimos em (b), se um quadrado legal tem área *n* então $n=a^2+b^2$ para alguns inteiros *a* e *b*; reciprocamente, se $n=a^2+b^2$ para alguns inteiros *a* e *b* então existe um quadrado legal de área *n*. Como $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$ vemos que um triângulo retângulo de catetos $a-b$ e $a+b$ terá hipotenusa $\sqrt{2n}$; o quadrado construído sobre esta hipotenusa terá área $2n$ (em outras palavras, mostramos que se *n* é soma de dois quadrados inteiros então $2n$ também o é). Usando este fato, ilustramos na figura ao lado uma construção de um quadrado legal de área *2n* (o quadrado grande em linha contínua) a partir de um quadrado legal de área *n* (o quadrado pequeno em linha contínua) (o quadrado pontilhado serve apenas para indicar os sentidos horizontal e vertical). Notamos, como antes, que como o quadrado original é legal então todos os pontos indicados são legais.



NÍVEL 3– QUESTÃO 3 – Solução



a) Sejam m e n, respectivamente, as medidas das bases do triângulo ABC e do retângulo $PQRS$, como na figura. Como a altura destas figuras é 1, segue que $\text{área}(ABC) = \dfrac{m}{2}$ e $\text{área}(PQRS) = n$. Da igualdade destas áreas segue $\dfrac{m}{2} = n$, donde $\dfrac{m}{n} = 2$.



b) Quando $x = \dfrac{1}{2}$ os pontos D e E coincidem com os pontos médios T e U dos lados AC e BC, respectivamente. Se V é o ponto médio do lado AB, podemos decompor o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, como na figura. Assim

$$\text{área}(ABUT) = \frac{3}{4}\text{área}(ABC) = \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{2} = \frac{3m}{8},$$

e então

$$f\left(\frac{1}{2}\right)n = \frac{3m}{8} = \frac{3\cdot(2n)}{8} = \frac{3n}{4}$$

donde $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

c) Vamos primeiro calcular a área do trapézio $ABED$ em função de x. Como DE é paralela a AB, os triângulos DEC e ABC são semelhantes; a razão de semelhança é a razão de suas alturas, que é $\dfrac{1-x}{1} = 1-x$. Como áreas de figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, segue que

$$\text{área}(DEC) = (1-x)^2\,\text{área}(ABC) = \frac{(1-x)^2 m}{2}.$$

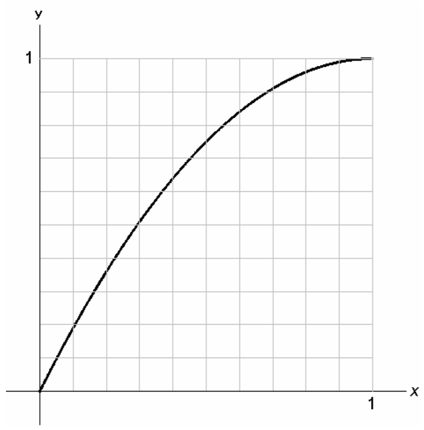
Logo

$$\text{área}(ABED) = \text{área}(ABC) - \text{área}(DEC) = \frac{m}{2} - \frac{(1-x)^2 m}{2} = (2x - x^2)n.$$

Da igualdade das áreas de ABC e $PQMN$, segue que

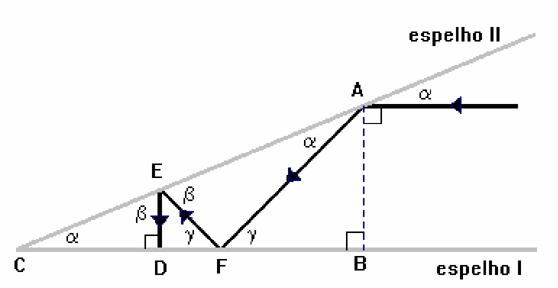
$$(2x - x^2)n = f(x)n$$

e concluímos que $f(x) = 2x - x^2$. A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x)$ para $0 \le x \le 1$.



QUESTÃO 4

a) *1ª solução*: Marcamos na figura os ângulos relevantes para a solução. Notamos em particular que em *A* o ângulo de incidência (e, portanto, o de reflexão) é igual a α; de fato, o raio de luz entra paralelo ao espelho **I** e a reta suporte do espelho **II** é transversal a ambos. Como γ é ângulo externo do triângulo *AFC*, segue que $\gamma = 2\alpha$. Analogamente, como β é ângulo externo do triângulo *CEF*, temos $\beta = \alpha + \gamma = 3\alpha$. Finalmente, do triângulo retângulo *CDE* temos $180^\circ = \alpha + \beta + 90^\circ = 4\alpha + 90^\circ$, donde $4\alpha = 90^\circ$, ou seja, $\alpha = 22{,}5^{\mathrm{o}}$.



2ª solução: Como a soma dos ângulos do triângulo *ABF* é 180°, segue que $B\hat{A}F = 90^\circ - \gamma$. E como a soma dos ângulos com vértice em *A* também é 180°, segue que $2\alpha + (90^\circ - \gamma) + 90^\circ = 180^\circ$, donde $\gamma = 2\alpha$. Considerando agora o triângulo *AFE*, temos $\alpha + \beta + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ$, donde tiramos $\beta = 2\gamma - \alpha = 3\alpha$. Finalmente, o triângulo *CDE* nos diz que $180^\circ = \alpha + \beta + 90^\circ = 4\alpha + 90^\circ$ e segue que $4\alpha = 90^\circ$, ou seja, $\alpha = 22{,}5^\circ$.

b) *1ª solução:* Observamos que, como $\gamma = 45^{\mathrm{o}}$, o triângulo *DEF* é isósceles, isto é, $ED = DF$. O teorema de Pitágoras nos diz que

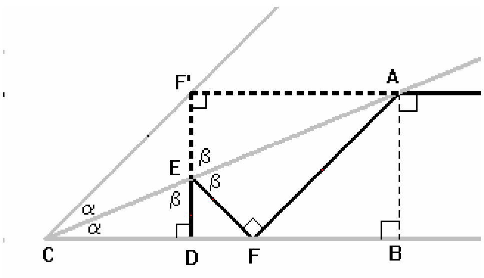
$$EF^2 = ED^2 + DF^2 = 2ED^2$$

donde tiramos $EF = \sqrt{2}\,ED$. O mesmo argumento aplicado ao triângulo *ABF* mostra que $AF = \sqrt{2}\,AB = 10\sqrt{2}$. Notamos agora que os triângulos *CDE* e *AFE* são semelhantes, pois têm os ângulos α e β em comum. Logo

$$\frac{CD}{AF} = \frac{CD}{10\sqrt{2}} = \frac{DE}{FE} = \frac{DE}{\sqrt{2}DE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde tiramos $CD = 10$.

2ª solução: Refletimos a reta *CF* usando a reta *CA* como eixo de simetria, obtendo a semi-reta *CF'*, onde *F'* é o simétrico de *F* (figura ao lado). Como $C\hat{E}F = C\hat{E}F'$, vemos que os pontos *D*, *E* e *F'* estão alinhados; assim, *CDF'* é um triângulo. Como $\alpha = 22{,}5^{\mathrm{o}}$ segue que $D\hat{C}F' = 45^\circ$, donde *CDF'* é isósceles e então $CD = DF'$. Para terminar, notamos que *ABDF'* é um retângulo, e segue que $DF' = AB$. Logo $CD = AB = 10$ cm.



QUESTÃO 5

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer das caixas.

b) Se ela parte de C, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a esquerda tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ou 25%.

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: *direita, esquerda* ou *esquerda, direita*; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) Existem três situações possíveis para que no final haja uma bolinha em cada caixa. Descrevemos estas situações na tabela abaixo, onde (por exemplo) a primeira linha indica a situação em que uma bolinha colocada em A cai na caixa 1, outra colocada em B cai na caixa 2 e a última, colocada em C, cai na caixa 3.

	caixa 1	**caixa 2**	**caixa 3**
1ª situação	A	B	C
2ª situação	A	C	B
3ª situação	B	A	C

Observando que os eventos “bola colocada em X caiu na caixa Y” são independentes e lembrando que a probabilidade de eventos independentes ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de cada evento. a probabilidade de que cada uma destas situações ocorra é:

1ª situação: $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$.

2ª situação: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$.

3ª situação: $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$.

Por outro lado, a ocorrência de cada uma das configurações acima é um evento disjunto dos outros dois; a probabilidade de ao menos um deles ocorrer é então igual à soma das probabilidades dos eventos individuais. Logo a probabilidade de que haja uma bolinha em cada caixa é

$$\frac{9}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

A título de observação, listamos abaixo as 12 possibilidades para a distribuição de três bolinhas pelas caixas e suas respectivas probabilidades.

caixa 1	**caixa 2**	**caixa 3**	**probabilidade**
A	B	C	18/64
A	C	B	3/64
A	BC	vazia	6/64
A	vazia	BC	9/64
AB	vazia	C	9/64
AB	C	vazia	3/64
B	A	C	3/64
B	AC	vazia	1/64
vazia	AB	C	6/64
vazia	ABC	vazia	2/64
vazia	AC	B	1/64
vazia	A	BC	3/64

QUESTÃO 6

a) Vamos calcular a posição ocupada, após um embaralhamento, pela n-ésima carta da pilha. Há dois casos a considerar:

- $n \le 52$ (ou seja, a carta está na metade superior da pilha): neste caso, após um embaralhamento, ficarão acima dela as primeiras n cartas da metade inferior e as primeiras $n-1$ cartas da parte superior. Logo, sua posição na pilha passará a ser $n+(n-1)+1=2n$.
- $n > 52$ (ou seja, a carta está na metade inferior da pilha Após um embaralhamento, ficarão acima dela as cartas precedentes da metade inferior, que são em número de $n-52-1=n-53$ e igual quantidade de cartas da metade superior. Logo, sua nova posição na pilha é $(n-53)+(n-53)+1=2n-105$.

Em particular, podemos agora completar a tabela, observando que $55=2\times 80-105$ e $5=2\times 55-105$.

número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10ª	20ª	40ª	80ª	55ª	5ª

b) Como visto acima, a carta que ocupa a posição n passa a ocupar, após um embaralhamento, a posição $2n$, *se* $n \le 52$ ou $2n-105$, se $n > 52$.

c) Inicialmente, observamos que após um embaralhamento

- as cartas da metade superior da pilha se movem para baixo, pois $2n > n$ para todo n positivo;
- as cartas da metade inferior da pilha se movem para cima, pois $2n-105 < n$ para todo $n < 105$.

Logo, para que duas cartas troquem de posição entre si, uma delas deverá estar na metade superior da pilha e outra na metade inferior. Suponhamos que existam duas cartas com essa propriedade, e seja n a posição da carta de metade superior. Após um embaralhamento ela se move para a posição $2n$, e então a carta na posição $2n$ deve passar para a posição n. Como a carta na posição $2n$ está na metade inferior da pilha. devemos ter $2(2n)-105=n$, donde $n=35$. E, de fato, as cartas nas posições 35 e 70 trocam de posição entre si a cada embaralhamento, pois $2\times 35=70$ e $2\times(2\times 35)-105=35$. Além disso, concluímos que não há outro par de posições com esta propriedade.

d) Para simplificar a exposição, vamos escrever $x \to y$ para indicar que a carta que está na posição x vai para a posição y após um embaralhamento.

Suponhamos que exista um trio fixo, e seja n a posição da primeira carta desse trio a contar do topo da pilha. O argumento do item (c) mostra que as cartas não podem estar todas na metade superior ou todas na metade inferior da pilha; logo a posição n está na metade superior da pilha.

Após um embaralhamento temos $n \to 2n$; se $2n$ está na parte superior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n \to n$; se $2n$ está na metade inferior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n-105 \to n$. No primeiro caso, temos

$$n = 2(4n)-105 = 8n-105,$$

donde $n=15$; no segundo temos

$$n = 2(4n-105)-105 = 8n-315$$

donde $n=45$. Agora basta verificar que (15,30,60) e (45, 90,75) são efetivamente trios fixos.

A título de curiosidade e/ou como exercício para o(a) leitor(a), listamos na tabela a seguir todas as k-uplas fixas, incluindo os casos $k=2$ e $k=3$ trabalhados nos itens (c) e (d) acima.

k	***k*-uplas fixas**
2	(35, 70)
3	(15, 30, 60), (45, 90, 75)
4	(7, 14, 28, 56), (21, 42, 84, 63), (49, 98, 91, 77)
6	(5, 10, 20, 40, 80, 55), (25, 50, 100, 95, 85, 65)
12	(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 23, 46, 92, 79, 53), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 87, 69, 33, 66, 27, 54), (9, 18, 36, 72, 39, 78, 51, 102, 99, 93, 81, 57), (11, 22, 44, 88, 71, 37, 74, 43, 86, 67, 29, 58) (13, 26, 52, 104, 103, 101, 97, 89, 73, 41, 82, 59), (17, 34, 68, 31, 62, 19, 38, 76, 47, 94, 83, 61)

Observamos ainda que após 12 embaralhamentos todas as cartas voltam à posição inicial.