NÍVEL 3 - Prova da 2ª fase - Soluções

QUESTÃO 1 (a) Se o Dodó colocar um número $x \neq 2$ no visor e apertar ↯, aparece o valor de $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$. Logo, para $x = 4$, o valor que vai aparecer é $f(4) = \dfrac{2 \times 4 - 3}{4-2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

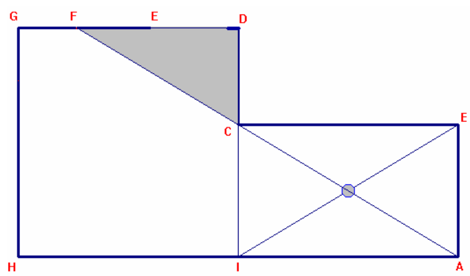
(b) Seja *b* o número que o Dodó colocou no visor. Ao apertar ↯, apareceu o número $f(b) = \dfrac{2b-3}{b-2}$, que o enunciado nos diz que é igual a *b*. Logo $\dfrac{2b-3}{b-2} = b$, donde $2b - 3 = b(b-2)$, ou seja, $b^2 - 4b + 3 = 0$. Essa equação tem as raízes $b = 1$ e $b = 3$, que são os números que o Dodó pode ter colocado no visor.

(c) Seja $b \neq 2$ o número que o Dodó colocou no visor. Ao apertar ↯ duas vezes, aparece o número

$$f(f(b)) = \frac{2f(b)-3}{f(b)-2} = \frac{2\dfrac{2b-3}{b-2} - 3}{\dfrac{2b-3}{b-2} - 2} = \frac{\dfrac{4b-6-3b+6}{b-2}}{\dfrac{2b-3-2b+4}{b-2}} = b$$

É importante notar que o Dodó pode apertar ↯ uma segunda vez. De fato, a equação $f(b) - 2 = 0$ não tem solução, ou seja, o denominador da expressão após o primeiro sinal de igualdade acima é sempre diferente de 0. De fato, se existisse *b* tal que $f(b) - 2 = 0$, teríamos $\dfrac{2b-3}{b-2} = 2$ e, portanto, $-3 = -4$, um absurdo. Logo, ao apertar ↯ nunca aparece o 2 no visor, e é sempre possível apertar ↯ uma segunda vez.

QUESTÃO 2 (a) Consideremos a figura do enunciado com os vértices rotulados como ao lado. Uma vez que a luz se propaga em linha reta, o triângulo *CDF* (sombreado na figura) corresponde à área do chão que não será iluminada pela lâmpada. O triângulo *CDF* é semelhante ao triângulo *ABC* e a razão de semelhança é $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{GH - AB}{AB} = \dfrac{1{,}1}{1{,}5} = \dfrac{11}{15}$. Como a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, segue que



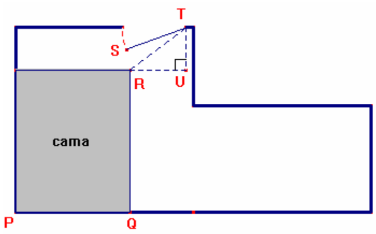
$$\text{área}(CDF) = \left(\frac{11}{15}\right)^2 \text{área}(ABC) = \left(\frac{11}{15}\right)^2 \frac{AB \times BC}{2} = \left(\frac{11}{15}\right)^2 \frac{1{,}5 \times 2{,}5}{2} = \frac{121}{120}\ \text{m}^2$$

Alternativamente, podemos calcular os lados do triângulo *CDF* usando a semelhança dos triângulos *CDF* e *ABC*. Temos $\dfrac{DF}{CD} = \dfrac{BC}{AB}$; logo $DF = \dfrac{BC \times CD}{AB} = \dfrac{2{,}5 \times 1{,}1}{1{,}5} = \dfrac{11}{6}$ e então

$\text{área}(CDF) = \dfrac{CD \times DF}{2} = \dfrac{1{,}1 \times \dfrac{11}{6}}{2} = \dfrac{121}{120}$ m², como antes.

NÍVEL 3 - Prova da 2ª fase - Soluções

(b) *1ª solução*: Consideramos a figura do enunciado, com os vértices rotulados como na figura ao lado. Temos $PQ = 1{,}6$ e $QR = 2{,}0$ (a figura do enunciado deixa claro que o menor lado da cama está na horizontal). Para decidir se a porta vai ou não tocar na cama, basta comparar os segmentos *RT* e *ST*. Para calcular *RT*, usamos o triângulo retângulo *RUT* representado na figura; temos $RU = 0{,}8$ e $UT = 0{,}6$, donde $RT = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1$. Como $ST = 0{,}9$, vemos que a porta vai passar a 10 cm da cama.



2ª solução: Podemos calcular a distância entre os pontos *R* e *T* da figura anterior colocando um sistema de coordenadas na figura anterior com origem em *P*, o eixo *x* em *PQ* e o eixo *y* na parede vertical esquerda. Nesse caso, *R* tem coordenadas (1,6; 2,0) e *T* tem coordenadas (2,4; 2,6). Logo

$$RT = \sqrt{(2{,}4 - 1{,}6)^2 + (2{,}0 - 2{,}6)^2} = \sqrt{0{,}64 + 0{,}36} = 1$$

O argumento final é o mesmo da solução anterior.

Notamos que as duas soluções são conceitualmente idênticas, pois a fórmula da distância de dois pontos no plano é uma conseqüência imediata do teorema de Pitágoras.

QUESTÃO 3 (a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

(c) *1ª solução*: Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 6 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

NÍVEL 3 - Prova da 2ª fase - Soluções

QUESTÃO 4 (a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256-64=192$ palitos.. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256-32=224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256-112=144$ palitos.

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\textbf{ímpar}}$	192	64	$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\textbf{ímpar}}$	224	32	$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\textbf{par}}$	112	144	...

(b) *1ª solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2\times 128=256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256-127=129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x+y=256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y+\frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x+\frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256-101=155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

(c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura	
101	155	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times 101=202$ palitos e Isaura tinha $256-202=54$ palitos;

Fernando	Isaura	
202	54	Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times 54=108$ palitos e Fernando tinha $256-108=148$ palitos;

Fernando	Isaura	
148	108	Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times 108=216$ palitos e Isaura tinha $256-216=40$ palitos;

Fernando	Isaura	
40	216	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times 40=80$ palitos e Fernando tinha $256-80=176$ palitos;

Fernando	Isaura	
80	176	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times 80=160$ palitos e Fernando tinha $256-160=96$ palitos;

NÍVEL 3 - Prova da 2ª fase - Soluções

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo a seqüência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.

(d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7 \times 1$	$64 = 2^6 \times 1$	$160 = 2^5 \times 5$	$80 = 2^4 \times 5$	$40 = 2^3 \times 5$	$148 = 2^2 \times 37$	$202 = 2^1 \times 101$	$101 = 2^0 \times 101$
Isaura	$128 = 2^7 \times 1$	$192 = 2^6 \times 3$	$96 = 2^5 \times 3$	$176 = 2^4 \times 11$	$216 = 2^3 \times 27$	$108 = 2^2 \times 27$	$54 = 2^1 \times 27$	$155 = 2^0 \times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde *a* e *b* são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares.

Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde *a* e *b* são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde *a* e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa.

O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e *n* decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

QUESTÃO 5 (a) Após o ingresso de número 1 foram vendidos $100 - 1 = 99$ ingressos. Logo quem comprou o primeiro ingresso receberá $99 \times 0{,}01 = 0{,}99$ reais. Do mesmo modo, após o ingresso de número 70 foram vendidos $100 - 70 = 30$ ingressos, logo quem comprou esse ingresso receberá $30 \times 0{,}01 = 0{,}30$ reais.

(b) *1ª solução:* O valor da venda de 100 ingressos é R$600,00. O Grêmio terá que devolver 1 centavo para quem comprou o 99º ingresso, 2 centavos para o quem comprou o 98º ingresso e assim por diante, até 99 centavos para quem comprou o 1º ingresso. No total, o Grêmio terá que devolver

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{99}{100} = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 99}{100} = \frac{\frac{99 \times 100}{2}}{100} = 49{,}50 \text{ reais}$$

e seu lucro será de $600 - 49{,}50 = 550{,}50$ reais.

2ª solução: Com os ingressos de número 1 e 100, o Grêmio tem um lucro de

$$(6-99\times 0{,}01)+(6-0\times 0{,}01)=11{,}01 \text{ reais.}$$

Com os ingressos de números 2 e 99, o lucro será de

$$(6-98\times 0{,}01)+(6-1\times 0{,}01)=11{,}01 \text{ reais}$$

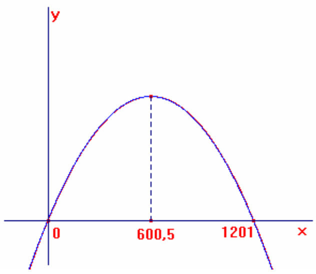
e assim por diante, com os ingresso de números 3 e 98, 4 e 97, ..., 50 e 51, num total de 49 pares, cada um dando ao Grêmio um lucro de R$11,01. Logo o lucro do Grêmio será de $50\times 11{,}01=550{,}50$ reais. Notamos que essa solução é baseada na idéia usada para demonstrar a conhecida fórmula para a soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética.

(c) *1ª solução:* Com a venda de x ingressos o grêmio arrecadará $6x$ reais e terá que devolver

$$\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{x-1}{100}=\frac{1+2+3+\cdots+(x-1)}{100}=\frac{\frac{(x-1)x}{2}}{100}=\frac{x^2-x}{200} \text{ reais.}$$

Logo o lucro do Grêmio será de

$$L(x)=6x-\frac{x^2-x}{200}=\frac{1201x-x^2}{200}=\frac{x(1201-x)}{200} \text{ reais.}$$



O gráfico de $L(x)$ é uma parábola; o valor máximo de $L(x)$ ocorre quando $x=600{,}5$ (para ver isto não é necessário usar a fórmula para os pontos de máximo ou mínimo, basta observar a simetria do gráfico). Como a quantidade de ingressos é um número inteiro, o lucro máximo do Grêmio será atingido quando forem vendidos 600 ou 601 ingressos. Como esses pontos são simétricos com relação a 600,5 o lucro será o mesmo em qualquer caso. Esse lucro é $L(600)=\frac{600(1201-600)}{200}=1803$ reais.

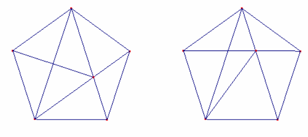
2ª solução: Podemos pensar que o comprador do ingresso de número n paga ao Grêmio R$6,00 reais, e que desses R$6,00 o Grêmio vai retirar R$0,01 para cada um dos compradores anteriores. Logo o lucro do Grêmio com o ingresso de número n é $f(n)=6-(n-1)\times 0{,}01=6{,}01-0{,}01\times n$ (notamos que essa expressão não depende do número de ingressos vendidos). Segue que o lucro do Grêmio por ingresso diminui de R$0,01 a cada ingresso vendido (ou seja, a função f é decrescente). Além disso, seu lucro com a venda de dos ingressos aumenta enquanto ele não tiver prejuízo (isto é, lucro negativo) com algum ingresso. Como o lucro do Grêmio com o ingresso de número 601 é $f(601)=6-(601-1)\times 0{,}01=0$ reais e a função f é decrescente, vemos que o lucro do Grêmio é positivo para todos os ingressos de número menor que 601, e negativo para todos os ingressos de número maior que 601. Logo o lucro do Grêmio será o maior possível quando forem vendidos 600 (ou 601) ingressos.

3ª solução: O comprador do último ingresso não recebe nada de volta, ou seja, o Grêmio vai lucrar R$6,00 com seu ingresso; o comprador do penúltimo ingresso recebe R$0,01 de volta, logo o Grêmio vai lucrar R$5,99 com seu ingresso. Desse modo, o lucro do Grêmio com a venda dos ingressos é

$$6{,}00+5{,}99+5{,}98+\cdots\cdots+(\text{lucro com o ingresso de número 1})$$

e segue que esse lucro cresce enquanto o lucro com o ingresso de número 1 for positivo. O lucro com o ingresso número 1 é $6-(x-1)\times 0{,}01$ reais, onde x é o número de ingressos vendidos. A equação $6-(x-1)\times 0{,}01=0$ tem raiz $x=601$, logo o lucro com o ingresso de número 1 é positivo se $x < 601$. Desse modo o lucro máximo será atingido quando o Grêmio vender 600 ingressos (ou 601, visto que o ingresso de número 601 dá lucro de 0 reais) .

QUESTÃO 6 (a) A figura à direita mostra duas soluções para o problema.



(b) *1ª solução*: A figura do enunciado mostra que ao traçar as cinco diagonais do pentágono obtemos 10 triângulos e um novo pentágono central. A repetição desse processo *n* vezes (pensamos na repetição de 0 vezes como não tendo feito nada) tem como resultado $10n$ triângulos e um pentágono central, que podemos dividir em 3, 5, 7, 9, ou 11 triângulos como mostrado no enunciado. Desse modo, podemos triangular legalmente o pentágono em $10n + r$ triângulos onde *r* pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9; como qualquer número ímpar se escreve dessa forma segue que podemos triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar de triângulos. Por exemplo, para triangular legalmente o pentágono em 229 triângulos escrevemos $229 = 10 \times 22 + 9$, efetuamos o processo de divisão por diagonais 10 vezes e finalmente dividimos o pentágono central em 9 triângulos.

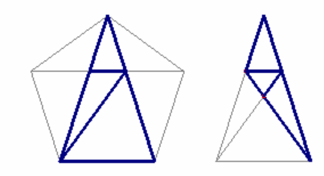
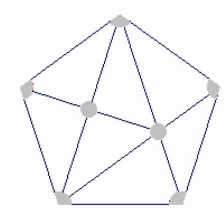


Figura I Figura II

2ª solução: a figura I à esquerda mostra uma divisão do pentágono em sete triângulos, onde destacamos uma parte em traço mais grosso. Podemos dividir legalmente essa parte de modo a gerar dois triângulos adicionais, como na figura II. Esse processo pode ser repetido na parte análoga destacada nessa última figura, gerando mais dois triângulos e outra figura análoga onde o processo pode ser repetido novamente, e assim por diante gerando dois novos triângulos em cada etapa. Isso mostra que, começando de uma triangulação com 7 triângulos, podemos obter qualquer número ímpar de triângulos.

(c) *1ª solução*: consideremos um pentágono triangulado legalmente, e sejam *n* o número de triângulos e *m* o número de pontos legais interiores dessa divisão. A soma dos ângulos de todos os triângulos é $180n$ graus. Por outro lado, essa soma é igual à soma dos ângulos em volta dos pontos legais interiores mais a soma dos ângulos internos do pentágono, ou seja, é igual a $360m + 540$ graus. Logo $180n = 360n + 540$, ou seja, $n = 2m + 3$ que é um número ímpar.

Exemplificamos essa demonstração com a figura ao lado, onde $n = 7$ e $m = 2$.



2ª solução: consideremos como acima um pentágono triangulado legalmente em *n* triângulos, e seja *m* o número total de lados desses triângulos. Ao contar os lados desses triângulos um por um, teremos dois casos: (i) contar um lado comum a dois triângulos e (ii) contar um dos lados do pentágono. No primeiro caso, cada lado é contado duas vezes; no segundo caso temos apenas os lados do pentágono. Obtemos então $m = \frac{3n-5}{2} + 5$; como *m* e *n* são números inteiros segue que $\frac{3n-5}{2}$ também é inteiro, ou seja, $3n-5$ é par, donde *n* é ímpar. A figura usada na solução anterior exemplifica essa demonstração no caso $n = 7$ e $m = 13$.