OBMEP 2006
SOLUÇÕES DA 2^{A} FASE
NÍVEL 3

.

Problema 1

a) Como 350 gramas $= 3,5 \times 100$ gramas e $350 < 600$, quem come 350 gramas paga $3,5 \times 1,50 =$ 5,25 reais $=$ 5 reais e 25 centavos. Por outro lado, temos 720 gramas $= 7,2 \times 100$ gramas. Como $720 > 600$, segue que quem come 720 gramas paga $7,2 \times 1,00 =$ 7,20 reais $=$ 7 reais e 20 centavos.

b) Como Raimundo comeu 250 gramas a mais que Macabéa e ambos pagaram a mesma quantia, concluímos que Raimundo pagou menos por grama de comida do que Macabéa. Logo Raimundo comeu mais de 600 gramas e Macabéa comeu no máximo 600 gramas. Vamos chamar de *r* e *m* o peso, em gramas, da comida que Raimundo e Macabéa consumiram, respectivamente. Então Raimundo pagou

$$\frac{r}{100} \times 1,00 = 0,01r \text{ reais}$$

e Macabéa pagou

$$\frac{m}{100} \times 1,50 = 0,015m \text{ reais.}$$

Como ambos pagaram a mesma quantia temos $0,01r = 0,015m$, e o enunciado nos diz que $r = m + 250$. Logo temos o sistema

$$\begin{cases} 0,01r = 0,015m \\ r = m + 250. \end{cases}$$

donde tiramos

$$0,015m = 0,01 \times (m + 250) = 0,01m + 2,5,$$

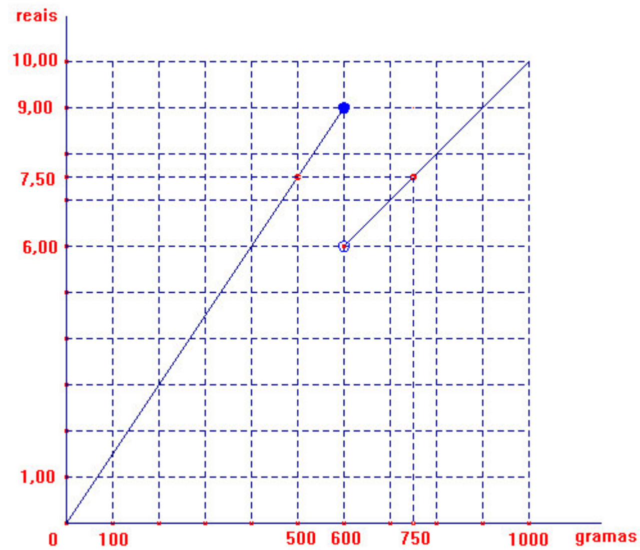
e segue que $0,005m = 2,5$, ou seja, $m = 500$ gramas. Segue que $r = m + 250 = 750$ gramas.

Para saber quanto eles pagaram, basta calcular, por exemplo, quanto Macabéa pagou: ela comeu 500 gramas, logo pagou $500 \times 1,50 = 7,50$ reais, tendo Raimundo pago a mesma quantia.

c) Chamando de *p(x)* o preço pago por quem come *x* gramas de comida, temos

$$p(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{se } x \le 600 \\ 0,01x & \text{se } x > 600 \end{cases}$$

Logo, o gráfico é formado por duas semi-retas, uma passando pelos pontos (0, 9) e (600, 9) e a outra pelos pontos (600, 6) e (1000, 10), não incluindo o ponto (600, 6). Macabéa comeu $x = 500$ gramas e pagou 7,50 reais, o que está representado no gráfico pelo ponto (500, 7,50). Raimundo comeu 750 gramas e pagou o mesmo que Macabéa, o que está representado pelo ponto (750, 7,50).



Problema 2

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1+2+6+4=13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7\times 13+9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer "o que falta". Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

dividendo (comprimento da corrida)	13 (divisor)
resto ("o que falta")	quociente (número de voltas completas)

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13\times\text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

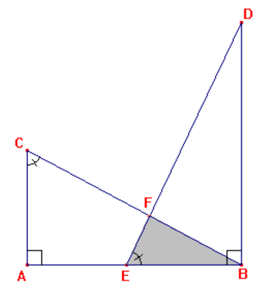
A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida.Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

Problema 3



a) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos

$$\text{área de } ABC = \text{área de } BDE\,,$$

donde

$$\begin{aligned}\text{área de } AEFC &= \text{área de } ABC - \text{área de } BFE \\ &= \text{área de } BDE - \text{área de } BFE\;. \\ &= \text{área de } BDF.\end{aligned}$$

Logo $\text{área de } AEFC = \text{área de } BDF$ e a razão pedida é

$$\frac{\text{área de } BDF}{\text{área de } AEFC} = 1\,.$$

b) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos $D\hat{E}B = B\hat{C}A$, donde

$$D\hat{E}B + A\hat{B}C = B\hat{C}A + A\hat{B}C = 90^{\circ}\,.$$

donde

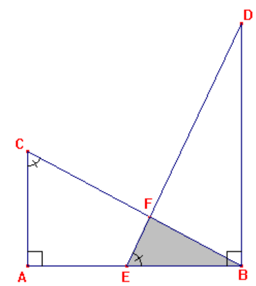
$$B\hat{F}E = 180^{\circ} - (D\hat{E}B + A\hat{B}C) = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}\,.$$

Outro modo de achar a medida de $B\hat{F}E$ é observar que os triângulos ABC e BEF são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais, a saber, o ângulo comum em B e os ângulos em C e E. Logo os ângulos em A e F são iguais, ou seja, o ângulo $B\hat{F}E$ é reto.

c) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes temos $EB = AC = 5$. Os triângulos ABC e FBE são semelhantes pois são retângulos e têm em comum o ângulo em B, logo $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{AB}$, ou seja $\frac{EF}{5} = \frac{BF}{12}$, donde $EF = \frac{5BF}{12}$. Como BEF é um triângulo retângulo, sua área é $\frac{EF \cdot BF}{2}$, e como $EF = \frac{5BF}{12}$ essa área é $\frac{5BF^2}{24}$. Pelo Teorema de Pitágoras temos $EB^2 = EF^2 + BF^2$, donde $5^2 = \frac{25BF^2}{12^2} + BF^2$, ou seja, $BF^2 = \frac{3600}{169}$. Logo a área de BEF é $\frac{5BF^2}{24} = \frac{5}{24} \cdot \frac{3600}{169} = \frac{750}{169}$ cm^2.

Podemos também argüir como segue. Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2,$$



donde $BC = 13$. Sejam $\alpha = A\hat{B}C = B\hat{D}E$. No triângulo ABC temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$ e $\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$. No triângulo *BEF*, temos $EF = EB \cdot \operatorname{sen}\alpha = 5 \cdot \frac{5}{13}$ cm e $BF = EB \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{60}{13}$ cm. Logo

$$\text{\emph{área}}\ EFB = \frac{1}{2} EF \cdot FB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{13} \cdot \frac{60}{13} = \frac{750}{169}\ \text{cm}^2.$$

Problema 4

a) A solução é feita em seis passos, assinalado cada um deles em vermelho.

1º passo

1	2		
3	4		
	3	1	
			2

2º passo

1	2		
3	4	2	
	3	1	
	1		2

3º passo

1	2		
3	4	2	1
	3	1	4
	1		2

4º passo

1	2		3
3	4	2	1
2	3	1	4
			2

5º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1		2

6º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

b) Não. No quadradinho assinalado com X não podemos colocar nem o 3 nem o 4 porque a 2ª linha já contém esses números. Por outro lado também não podemos colocar nem 1 nem 2 porque a última coluna já contém esses números.

1	2		
3	4		X
			2
			1

c) De acordo com o item (b), temos quatro opções para preencher o quadrado D, que são

3	4
2	1

4	3
2	1

2	3
4	1

2	4
3	1

Como no item (b), vemos que opção sombreada não é possível, uma vez que não teremos como preencher o quadradinho assinalado com X.

1	2		
3	4		
	X	3	1

Logo, para preencher o quadrado D só restam as 3 opções

2	**3**
4	1

3	**4**
2	1

4	**3**
2	1

Uma vez preenchido o quadrado D, os quadrados B e C podem ser preenchidos de modo único. Logo, temos 3 maneiras para completar o quadrado original, que são

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
4	**1**	**2**	**3**
2	**3**	**4**	1

1	2	**4**	**3**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**2**	1

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**2**	1

d) Para preencher o quadrado A, na ordem crescente 1, 2, 3 e 4 temos a seguinte situação:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 posições;
- colocado o 1, temos 3 posições para o 2;
- colocados o 1 e o 2, temos 2 posições para o 3;
- colocados o 1, o 2 e o 3 temos apenas uma posição para o 4.

Logo, o quadrado A pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

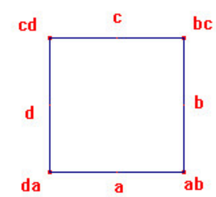
Preenchido o quadrado A, vamos agora preencher o quadrado D:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas;
- uma vez colocado o 1, usando o mesmo argumento que no item (c), vemos que existem 3 meneiras de completar o quadrado D.

Logo, temos $24 \times 4 \times 3 = 288$ modos de preencher os quadrados A e D. Sabemos que, estando esses dois quadrados preenchidos, só temos uma maneira de preencher os quadrados B e C. Logo, o número total de quadrados especiais é 288.

Problema 5

a) *1ª solução*: Sejam a, b, c e d os números escritos nos lados do quadrado, como na figura. Os números associados aos vértices são, portanto, *ab, bc, cd* e *da*, e sua soma é



$$\begin{aligned} ab + bc + cd + da &= b(a+c) + d(a+c) \\ &= (a+c)(b+d) \\ &= 85 \times 60 = 5100 \end{aligned}$$

2ª solução: Sejam a e b dois lados adjacentes do quadrado e $60-a$ e $85-b$ os outros dois. Então a soma dos produtos dos comprimentos de lados adjacentes é

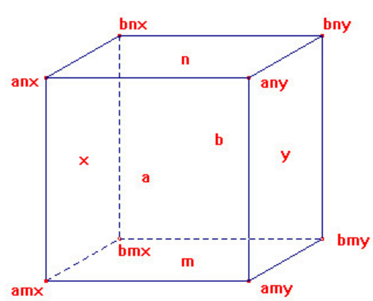
$$ab + b(60-a) + (60-a)(85-b) + (85-b)a = 5100\,.$$

b) Sejam (a, b), (m,n) e (s,y) os pares de números escritos em faces opostas do cubo, como na figura. Os números associados aos vértices são, portanto, *amx, anx, amy, any, bmx, bnx, bmy* e *bny*, e sua soma é

$$\begin{aligned} 105 &= amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny \\ &= a(mx + nx + my + ny) + b(mx + nx + my + ny) \\ &= (a+b)(mx + nx + my + ny) \\ &= (a+b)[(m+n)x + (m+n)y] \\ &= (a+b)(m+n)(x+y) \end{aligned}$$

Como 105 se fatora em fatores primos como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ e os números $a+b$, $m+n$ e $x+y$ são inteiros maiores que 1, segue que $a+b$, $m+n$ e $x+y$ devem ser iguais a 3, 5 e 7 (em qualquer ordem). Logo

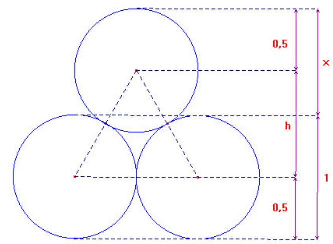
$$a + b + x + y + m + n = 3 + 5 + 7 = 15\,.$$



Na figura os números a e b estão escritos, respectivamente, na frente e atrás do cubo, os números m e n em baixo e em cima e os números x e y à esquerda e à direita.

Problema 6

a) Queremos determinar a distância x entre o topo de uma camada e o topo da camada seguinte. Consideremos o triângulo eqüilátero formado pelos centros de três circunferências tangentes duas a duas, como na figura. Esse triângulo tem lado $\ell = 1$ cm e sua altura mede $h = \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, a figura nos mostra que $x + 1 = 0,5 + h + 0,5 = h + 1$, e segue que $x = h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



b) No método A cada camada tem exatamente 6 lápis, logo para empilhar 90 lápis serão necessárias $90 \div 6 = 15$ camadas. Como a altura de cada camada é *1*cm, a altura mínima da caixa, nesse caso, deve ser de 15 cm.

Utilizando o método B, alternam-se fileiras de 6 e de 5 lápis, de forma que cada duas fileiras contêm 11 lápis. Assim, serão necessárias 16 fileiras completas para empilhar $8 \times 11 = 88$ lápis, e mais uma 17ª fileira incompleta com os 2 lápis que faltam. Para calcular a altura dessa pilha, observamos que a 1ª fileira tem altura 1 cm e cada uma das demais acrescenta $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm à altura. Utilizando a aproximação indicada concluímos que a altura mínima da caixa, neste caso, é aproximadamente $1 + 16 \times 0,87 = 14,92$ cm.

c) Para colocar 90 lápis em uma caixa de altura 14,5 cm, Olímpico teve que misturar os métodos de empilhamento, pois ele viu (como no item (b)) que para fazer isso usando exclusivamente o método A seria necessário uma caixa de altura mínima de 15 cm e, pelo método B, uma caixa com altura mínima de aproximadamente de 14,92 cm.

Supondo que Olímpico tenha usado camadas completas de lápis, sejam x e y o número de camadas de 6 e de 5 lápis, respectivamente, que ele usou; devemos ter então $6x + 5y = 90$. Observando que $5y$ e 90 são múltiplos de 5, concluímos que x deve ser múltiplo de 5. Logo x só pode assumir os valores 5 ou 10 pois $x = 0$ representa utilizar apenas fileiras de 5 lápis, $x = 15$ corresponde a utilizar apenas o método A, o que não é o caso. Notamos também que x não pode ser maior que 15, pois nesse caso o número de lápis seria maior que 90.

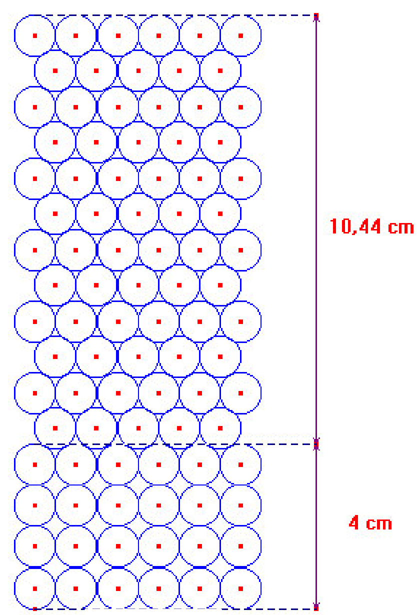


Figura 1

Se $x = 5$ e $y = 12$ teríamos 17 camadas de lápis, com altura certamente maior ou igual a $1 + 16 \times 0,87 = 14,92$ cm. Logo Olímpico deve ter usado $x = 10$ e $y = 6$, ou seja, 10 camadas de 6 lápis e 6 de 5 lápis. Um modo de empilhamento que ele pode ter usado está ilustrado na figura 1, onde a altura da pilha é aproximadamente $4+12\times 0{,}87=4+10{,}44=14{,}44$ cm.

Alternativamente, Olímpico pode ter percebido (como na solução do item (b)) que 88 lápis podem ser empilhados pelo método B em uma caixa com altura $1+15\times 0{,}87=14{,}05$ cm de altura. Os dois lápis que faltam podem completar duas camadas de 5 lápis, como na figura 2, aumentando a altura total em aproximadamente $3\times(1-0{,}87)=0{,}39$ cm, ou seja, até $14{,}05+0{,}39=14{,}44$ cm.

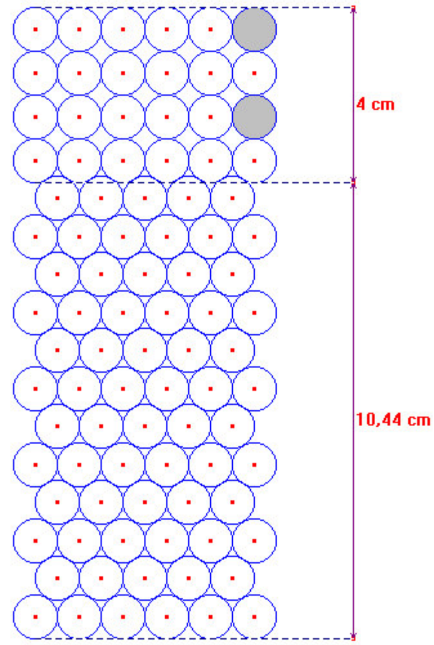


Figura 2

Esse problema leva a uma pergunta interessante: qual a menor altura de uma caixa em que podem ser colocados *n* lápis? Divirta-se tentando achar a solução. Uma pista: não é tão simples quanto parece!