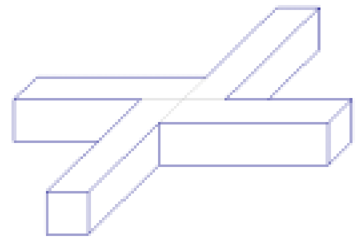
Somando novos talentos para o Brasil

OBMEP – Nível 3 – 2ª Fase
Soluções

QUESTÃO 1. Quincas Borba uniu quatro blocos retangulares de madeira, cada um com 4 *cm* de comprimento, 1 *cm* de largura e 1 *cm* de altura, formando o objeto mostrado na figura.

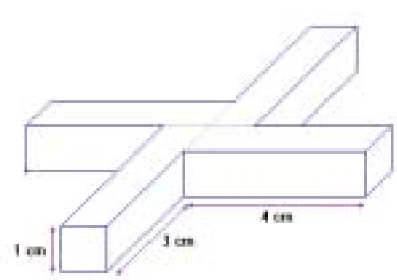


A) Qual é o volume deste objeto?
B) Quantas arestas tem este objeto?
C) Qual a área da superfície deste objeto?

Solução:

A) O volume de cada bloco é igual à área da base multiplicada pela altura, isto é, $4\times1\times1=4$ cm^3. O volume do objeto formado por estes blocos é igual à soma dos volumes dos blocos, ou seja, é $4\times4=16$ cm^3 .

Para apresentar a solução dos itens (b) e (c), vamos imaginar o objeto colocado sobre uma mesa, na posição indicada na figura.



B) Contamos 12 arestas em contato com a mesa, outras 12 na parte superior do objeto e 12 arestas perpendiculares à mesa, num total de $12+12+12=36$ arestas.

C) A superfície do objeto em contato com a mesa consiste de quatro retângulos de área $4\times1=4$ cm^2 cada um; o mesmo acontece com a parte superior do objeto. As faces perpendiculares à mesa são quatro retângulos de área $4\times1=4$ cm^2, outros quatro de área $3\times1=3$ cm^2 e quatro quadrados de área $1\times1=1$ cm^2. Assim, a área da superfície do objeto é $4\times4+4\times4+4\times4+4\times3+4\times1=64$ cm^2.

QUESTÃO 2. A seqüência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21,... é formada a partir do numero 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 mais o primeiro, o terceiro é 4 mais o segundo,o quarto é 3 mais o terceiro, o quinto é 4 mais o quarto e assim sucessivamente.

A) Escreva os 20 primeiros termos desta seqüência.
B) Qual é o 1000^o termo desta seqüência?
C) Algum termo desta seqüência é igual a 2000? Por quê?

Solução:

A) Seguindo a lei de formação da seqüência, os 20 primeiros termos são 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63 e 66.

Para os itens (B) e (C), observamos que a seqüência dada pode ser decomposta em duas seqüências, como segue:

(i) a seqüência **I** dos termos de ordem ímpar: 0, 7, 14, 21, …. Esta seqüência consiste dos múltiplos de 7; seu termo geral é $7n$ para $n \geq 0$.

(ii) a seqüência **P** dos termos de ordem par: 3, 10, 17., 24, …. Esta seqüência consiste dos múltiplos de 7 somados com 3; seu termo geral é $7n+3$ para $n \geq 0$.

B) Como 1000 é par, vemos que o 1000^o termo da seqüência original é o 500^o termo da seqüência **P**. Este termo corresponde a $n = 499$, uma vez que o primeiro termo de **P** corresponde a $n = 0$. Logo, o termo procurado é $7 \times 499 + 3 = 3496$.

C) Temos que $2000 = 7 \times 285 + 5$. Logo 2000 não pode ser escrito nem na forma $7n$ nem na forma $7n+3$ para algum $n \geq 0$, e portanto 2000 não é um termo da seqüência, Outra maneira de resolver este item é notar que as as soluções das equações $2000 = 7n$ e $2000 = 7n + 3$ não são números naturais.

QUESTÃO 3.

Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A empresa Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$3,00 reais mais R$0,50 por quilômetro rodado. Já Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$1,00 mais R$0,75 por quilômetro rodado.

Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nesta cidade e sempre voltam de taxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os taxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os taxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

A) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?
B) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

Solução:

Segue imediatamente do enunciado que o custo de uma corrida de *x* quilômetros é $3 + 0{,}5x$ reais na Dona Leopoldina *e* $1 + 0{,}75x$ na Dom Pedro II. Um ponto a ser discutido aqui é se devemos pensar em *x* como um número inteiro ou como um número real, pois o taxímetro avança a cada quilômetro rodado, ignorando frações de quilômetro. A solução apresentada abaixo supõe que *x* seja um número real, ou seja, que o taxímetro roda continuamente, mas vale (com pequenas mudanças) para o caso em que restringimos *x* aos inteiros.

A) Seja *s* a distância entre o local de trabalho e a casa de Sofia. Como Sofia paga o mesmo valor em ambas as empresas segue que $3 + 0{,}5 = 1 + 0{,}75s$, donde $s = 8$. Logo Sofia paga $3 + 0{,}5 \times 8 = 7$ reais pela corrida.

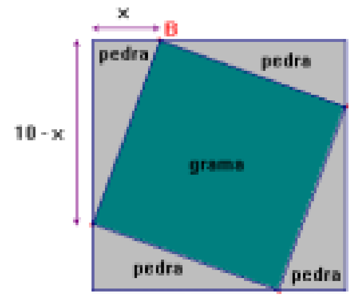
[Se pensarmos em *s* como um número inteiro, a conclusão é que Sofia percorre de táxi pelo menos 8 quilômetros mas menos de 9 quilômetros de seu trabalho até sua casa.]

B) Sejam agora *b* e *h*, respectivamente, as distâncias entre o local de trabalho e as casas de Bento e Helena. Como Helena paga menos usando os táxis da Dona Leopoldina, temos $3 + 0{,}5h < 1 + 0{,}75h$, donde $0{,}25h > 2$, ou seja, $h > \dfrac{2}{0{,}25} = 8$.

Analogamente, como Bento paga menos usando os táxis da Dom Pedro, temos $3 + 0{,}5b > 1 + 0{,}75b$, e concluímos que $b < 8$. Deste modo, a corrida de Bento do trabalho para casa não chega a 8 quilômetros, e é ele quem percorre a menor distância

[Se pensarmos em b e h como números inteiros, a conclusão é que a corrida de táxi de Bento é de menos de 8 quilômetros, enquanto que a de Helena é de pelo menos 9 quilômetros.]

QUESTÃO 4. Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10m de lado, que terá canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento deste segmento AB está indicado por x na figura.



A) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.
B) Escreva a expressão sa área do canteiro de grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ 3,00 por metro quadrado. *Use esta informação para responder os dois itens a seguir:*

.

C) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cincos canteiros?
D) Se o prefeito tem apenas R$358,00 para gastar com os cincos canteiros, qual é a a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

Solução:

A) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$; quando $x = 2$, estes catetos valem 2 e 8. Logo a área de cada canteiro é $\frac{2 \times 8}{2} = 8\,\text{m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2 segue que a área do canteiro central é $100 - 4 \times 8 = 68\ \text{m}^2$.

B) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$, tendo assim área de $\frac{1}{2}x(10 - x)\ \text{m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2, segue que a área do canteiro central é

$$100 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x) = 2x^2 - 20x + 100\ \text{m}^2$$

Pode-se também notar que o lado L do canteiro de grama é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$. A área deste canteiro é L^2. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$L^2 = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

como antes.

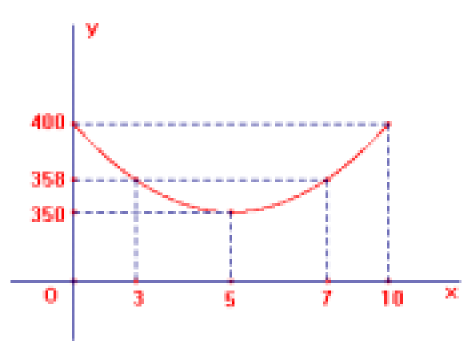
C) O custo total dos canteiros é igual a

custo do canteiro de grama + 4$\times$ *(custo de um canteiro de pedra)*

O custo do canteiro de grama é $4(2x^2 - 20x + 100)$ reais e o de um canteiro de pedra é $3 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x)$ reais. Designando por $c(x)$ o custo total dos canteiros em função de x, temos

$$c(x) = 4 \cdot (2x^2 - 20x + 100) + 4 \cdot \left[3 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x)\right] = 2x^2\ -$$

O gráfico da função c é a parábola representada ao lado (*atenção*: este é apenas um esboço do gráfico, sem respeitar a escala ao longo do eixo dos y). O



valor mínimo de c é assumido quando $x = \frac{20}{2 \times 2} = 5$; o custo mínimo é então $c(5) = 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 400 = 350$ reais.

D) Se o prefeito construir uma praça cujo canteiro de grama tem área de a m^2, então o custo total da praça é $4a + 3(100 - a) = 300 + a$ reais. Vemos assim que o custo cresce quando a cresce, e deste modo a área máxima do canteiro de grama corresponde ao máximo que o prefeito pode gastar, que é R$358,00. Neste caso temos a equação $300 + a = 58$, donde o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir tem àrea de 58 m^2.

QUESTÃO 5.

Em um jogo cada participante recebe um cartão com 4 números distintos de 1 a 20, dispostos em duas linhas e duas colunas. Os números são sucessivamente sorteados de uma caixa que contém 20 bolas idênticas, que foram numeradas de 1 a 20. Ganha o participante que for o primeiro a ter sorteados dois números de uma linha ou dois números de uma coluna.

A) Os cartões $\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \end{array}$ e $\begin{array}{c|c} 12 & 1 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$ são <u>equivalentes</u>, porque se um deles ganha o jogo então o outro ganha também. Descreva todos os cartões equivalentes a $\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ \hline 9 & 4 \end{array}$.

B) Qual é a probabilidade de que o cartão $\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \end{array}$ ganhe logo na segunda bola sorteada?

SOLUÇÃO:

A) Dois cartões são equivalentes quando suas linhas e colunas são compostas pelos mesmos quatro pares de números. No caso do cartão $\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ \hline 9 & 4 \end{array}$, os quatro pares são (7,2), (2,4), (4,9) e (9,7). Os outros cartões que possuem estes mesmos pares em suas linhas e colunas são:

$$\begin{array}{c|c} 9 & 7 \\ \hline 4 & 2 \end{array},\ \begin{array}{c|c} 4 & 9 \\ \hline 2 & 7 \end{array},\ \begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 7 & 9 \end{array},\ \begin{array}{c|c} 9 & 4 \\ \hline 7 & 2 \end{array},\ \begin{array}{c|c} 2 & 7 \\ \hline 4 & 9 \end{array},\ \begin{array}{c|c} 7 & 9 \\ \hline 2 & 4 \end{array} \text{ e } \begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 9 & 7 \end{array}.$$

B) *Solução 1*: Existem 20 maneiras de sortear a primeira bola. Uma vez sorteada a primeira bola, há 19 maneiras de sortear a segunda (pois não há números iguais nos cartões). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, há 20×19 maneiras de sortear os dois primeiros números. Este é o número total de casos possíveis para o experimento. Para que o cartão $\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \end{array}$ ganhe logo na segunda bola sorteada, os dois números sorteados devem formar uma de suas linhas ou colunas, em número de quatro. Como há duas maneiras de sortear uma linha ou uma coluna, o número de casos favoráveis é 8. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{8}{20 \times 19} = \frac{2}{95}$.

Solução 2: Para que o cartão ganhe na segunda bola sorteada, a primeira bola deve ter um dos 4 números do cartão. Como há 20 bolas, a probabilidade de isto ocorrer é $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Além disso, o número da segunda bola deve ser um dos dois números que estão na linha ou na coluna do primeiro; como agora restam 19 bolas na caixa, a probabilidade disto ocorrer é $\frac{2}{19}$. Assim, a probabilidade do cartão ganhar logo na segunda bola sorteada é $\frac{1}{5} \times \frac{2}{19} = \frac{2}{95}$.

Solução 3: Podemos pensar nos dois primeiros números sorteados como um subconjunto de dois elementos dos números de 1 a 20, que são em número de $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = 10 \times 19$. Este é o número total de casos possíveis para este experimento. Por outro lado, o número de casos favoráveis é 4, que é o número de pares do cartão que estão na mesma linha ou na mesma coluna. Deste modo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{10 \times 19} = \frac{2}{95}$.

QUESTÃO 6. Capitu cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros cada um.

a) Qual era a área da folha antes de ser cortada?

b) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?

c) Capitu precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Solução:

A) A área da folha era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056 \text{ cm}^2$$

B) Sejam a e b as dimensões da folha, com $a \le b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = 1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida.

Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x \times 3^y \times 11^z$, onde x, y e z são inteiros tais que $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 1$. Lembrando que $ab = 1056$ e que a e b são maiores que 18, obtemos os seguintes possibilidades:

a	***b***
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

Temos agora que decidir quais destas possibiliidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento *b* da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que (i) não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e (ii) não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b \le 1 + 4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 18$, ou seja, $2b \le 86$. Logo $b \le 43$ e a única possibilidade é $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

Existem outras maneiras de eliminar os pares (22,48) e (24,44), usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns.

Esta solução depende do fato de que, em qualquer decomposição de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um vértice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este vértice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um vértice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois caso contrário teríamos ângulos diferentes de 90^o ou 180^o na decomposição, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

B) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada abaixo: