Questão 1

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:

1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;
2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;
3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;
4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.

Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é $3 \times 2 = 6$; o resultado da segunda conta é $6 + 3 = 9$ e o da terceira conta é $9 \times 5 = 45$. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é $45 + 4 = 49$. Assim Joãozinho deve dizer "Quarenta e nove" ao matemágico.

b) *1ª solução:* Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, após a terceira conta obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o algarismo das unidades do número dito ao matemático é

- 1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;
- 2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;
- 4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.

Desse modo, se Mariazinha disse 76 ao matemágico, seu cartão era verde e o resultado da terceira conta realizada por ela foi $76 - 1 = 75$; o resultado da segunda conta foi $75 \div 5 = 15$; o resultado da primeira conta foi $15 - 3 = 12$ e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi $12 \div 2 = 6$. Conferindo: $(2 \times 6 + 3) \times 5 + 1 = 76$.

2ª solução: Essa solução não difere essencialmente da anterior, mas é mais precisa e permite uma solução imediata do item c). Como antes, vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, ao multiplicar por 2 obtemos um número par; ao somar 3 ao resultado, obtemos um número ímpar (esse é o detalhe em que essa solução difere da anterior). Ao multiplicar por 5, obtemos um número cujo algarismo das unidades é 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o último algarismo do número dito ao matemático é

- 6, se o cartão escolhido é verde;
- 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 8, se o cartão escolhido é azul;
- 9, se o cartão escolhido é vermelho.

O restante dessa solução procede como a anterior.

3ª solução (algébrica): Seja x o número de um cartão; então o número dito ao matemágico é $5(2x+3)+y = 10x+15+y$, onde y é um número inteiro de 1 a 4 correspondendo à cor do cartão. Temos aqui $10x+15+y = 76$, ou seja, $10x + y = 61$. Como o dígito das unidades de $10x$ é 0, vemos que y só pode ser 1; logo $10x = 60$, donde $x = 6$ e concluímos que o cartão escolhido foi o 6 verde.

c) *1ª solução (de acordo com a 1ª solução do item b)):* Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi $61 - 1 = 60$, depois da segunda conta o número obtido foi $60 \div 5 = 12$, depois da primeira conta o número obtido foi $12 - 3 = 9$ e então o número no cartão deve ser $9 \div 2 = 4{,}5$, o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

2ª solução (de acordo com a 2ª solução do item b)): Dizer ao matemágico um número cujo algarismo das unidades é diferente de 6, 7, 8 ou 9 indica que houve algum erro de conta.

3ª solução: Para simplificar, vamos chamar de “resultado” de um cartão o número que deve ser dito ao matemágico por uma criança que escolha esse cartão. Observamos que entre cartões de mesmo número, o verde tem o menor resultado e o vermelho o maior. Por outro lado, o resultado do cartão 1 vermelho é $(1\times 2+3)\times 5+4=29$ e o do 2 verde é $(2\times 2+3)\times 5+1=36$, o resultado do 2 vermelho é $(2\times 2+3)\times 5+4=39$ e o do 3 verde é $(2\times 3+3)\times 5+1=46$, e assim por diante; isso mostra que, entre cartões de números diferentes, o cartão que tem o maior número tem também o maior resultado, independente da cor. Como o resultado do cartão 4 vermelho é $(2\times 4+3)\times 5+4=59$ e o do 5 verde é $(2\times 5+3)\times 5+1=66$, um cartão cujo resultado fosse 61 deveria ter número maior que 4 e menor que 5, o que não pode acontecer.

<u>Questão 2</u>

a) Como $210\div 3=70$, existem 70 cartões cujos números são múltiplos de 3. Mais precisamente, esses cartões são os de número $3=1\times 3$, $6=2\times 3$, $9=3\times 3$, $12=4\times 3$,... , $204=68\times 3$, $207=69\times 3$ e $210=70\times 3$.

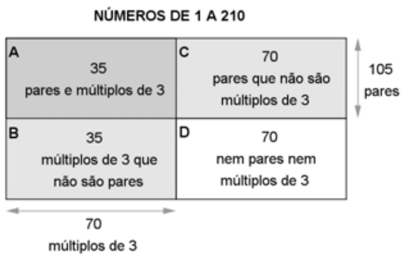
b) *1ª solução:* Um raciocínio idêntico ao do item a) mostra que existem $210\div 2=105$ cartões com números pares entre 1 e 210 (inclusive). Por outro lado, os números pares entre 1 e 210 que são múltiplos de 3 são 2×3, 4×3, 6×3,... , 68×3 e 70×3, em número de 35. Logo existem $105-35=70$ cartões com números pares que não são múltiplos de 3.

2ª solução: Há 105 cartões pares. Por outro lado, entre os 70 múltiplos de 3 há $70\div 2=35$ pares; logo $105-35=70$ são pares mas não múltiplos de 3.

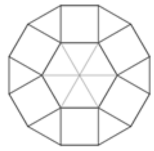
3ª solução: Retiram-se dos cartões os 70 múltiplos de 3, sobrando $210-70=140$ cartões. Desses, metade são pares, pois entre dois múltiplos de 3 consecutivos um dos números é par e o outro ímpar; logo entre eles há $140-70=70$ cartões que não são nem pares nem múltiplos de 3.

4ª solução: Observamos que entre os números de 1 a 6 existem dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 2 e 4. Do mesmo modo, dos números de 7 a 13 temos dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 8 e 10. Esse padrão se repete de seis em seis números consecutivos até chegar aos números de 205 a 210, onde aqueles pares que não são múltiplos de 3 são 206 e 208. Temos assim $210\div 6=35$ blocos e, em cada um, dois números pares que não são múltiplos de 3, num total de $35\times 2=70$ números.

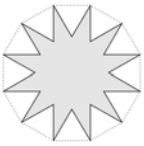
c) As partes **A**, **B** e **C** da figura ao lado correspondem às conclusões dos itens anteriores; sobram então $210-(35+35+70)=70$ cartões com números que não são nem pares nem múltiplos de 3, correspondendo à parte **D**. Escolhendo um número na parte **A**, outro na parte **B** (ou **C**) e 70 na parte **D**, vemos que é possível escolher 72 cartões tais quaisquer dois deles não tenham números que sejam simultaneamente pares ou múltiplos de 3. Por outro lado, ao escolher 73 cartões, os números de pelo menos três deles devem ficar fora da parte **D**, ou seja, nas partes **A**, **B** e **C**. Se dois desses números ficam na mesma parte eles têm 2 ou 3 (ou mesmo ambos, no caso de ficarem na parte **A**) como divisor comum; caso contrário, temos um na parte **A** e outro na parte **B** (ou **C**) que têm 3 (ou 2) como divisor comum. Logo Catarina deve pegar 73 cartões.



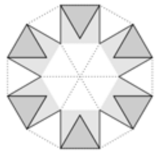
Questão 3



a) A figura ao lado mostra que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais aos triângulos que fazem parte do dodecágono. Como cada um desses triângulos tem área 1 cm^2, segue que o hexágono tem área 6 cm^2.



b) *1ª solução:* A figura do item anterior mostra que o dodecágono pode ser decomposto em doze triângulos equiláteros iguais e seis quadrados. Desse modo, ao retirar doze triângulos do dodecágono, a estrela que sobra tem área igual à área de seis quadrados. Como o lado do dodecágono mede 1 cm, cada quadrado tem área 1 cm^2 e assim a área da estrela é 6 cm^2.



2ª solução: Podemos decompor o hexágono central da estrela em seis triângulos e "encaixá-los" como indicado na figura à direita. A figura assim obtida tem a mesma área da estrela e consiste de seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.

c) A figura ao lado mostra que os dois hexágonos retirados têm a mesma área que doze triângulos equiláteros; como no item b), a região cinza tem a mesma área que seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.

Questão 4

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2\times 45=90$. Logo a soma que está faltando é $90-(9+13+14+17+18)=90-71=19$.

b) *1ª solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª solução: Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1,3,5,7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5=2+3=1+1+3=1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado.

O seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7,16, 22 e 13,14,18; podemos então supor que as somas das linhas são 7,16,22 e as somas das colunas são 13,14,18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas , (troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

Questão 5

a) Substituindo $A=5$ e $B=7$ em $A\times C=B$, temos $5\times C=7$ e segue que $C=\dfrac{7}{5}$. Podemos agora achar D substituindo os valores de B e D em $B\times D=C$; obtemos $7\times D=\dfrac{7}{5}$ e então $D=\dfrac{1}{5}$. Finalmente, de $C\times E=D$ temos $\dfrac{7}{5}\times E=\dfrac{1}{5}$ e vemos que $E=\dfrac{1}{7}$.

b) Multiplicando as expressões $A\times C=B$ e $B\times D=C$ obtemos $A\times B\times C\times D=B\times C$; como B e C são diferentes de 0, concluímos que $A\times D=1$, ou seja, $D=\dfrac{1}{A}$. Do mesmo modo, multiplicando as expressões $B\times D=C$ e $C\times E=D$ obtemos $B\times E=1$, ou seja, $E=\dfrac{1}{B}$. Repetindo esse raciocínio, vemos que cada letra a partir do D é o inverso da letra que aparece três posições atrás dela; em particular, $G=\dfrac{1}{D}=\dfrac{1}{\frac{1}{A}}=A$.

c) O item anterior nos mostra que $C\times D\times E\times F\times G\times H=C\times D\times E\times\dfrac{1}{C}\times\dfrac{1}{D}\times\dfrac{1}{E}=1$; o mesmo raciocínio mostra que o produto de quaisquer seis letras consecutivas é igual a 1. Temos então

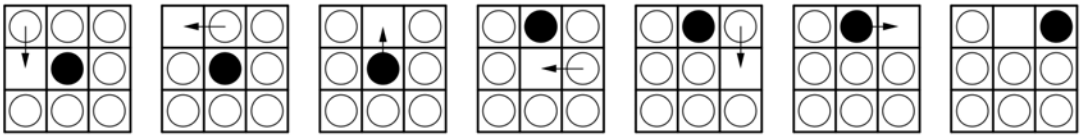
$$A\times B\times C\ldots\times Y\times Z=A\times B\times(C\times\ldots\times H)\times(I\times\ldots\times N)\times(O\times\ldots\times T)\times(U\times\ldots\times Z)=A\times B=2010$$

pois todos os produtos entre parêntesis são produtos de seis letras consecutivas, logo são todos iguais a 1.

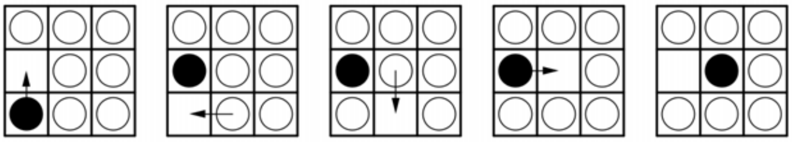
Observação: Notamos que esse problema depende do fato de que, uma vez fixados os valores de A e B, a sequência dos valores das letras do alfabeto é $A,B,\dfrac{B}{A},\dfrac{1}{A},\dfrac{1}{B},\dfrac{A}{B},A,B,\dfrac{B}{A},\dfrac{1}{A},\dfrac{1}{B},\dfrac{A}{B},A,B,\ldots$.

Questão 6

a) A figura abaixo mostra que a sequência de seis movimentos $(\downarrow,\leftarrow,\uparrow,\leftarrow,\downarrow,\rightarrow)$ termina o jogo a partir da posição inicial dada.

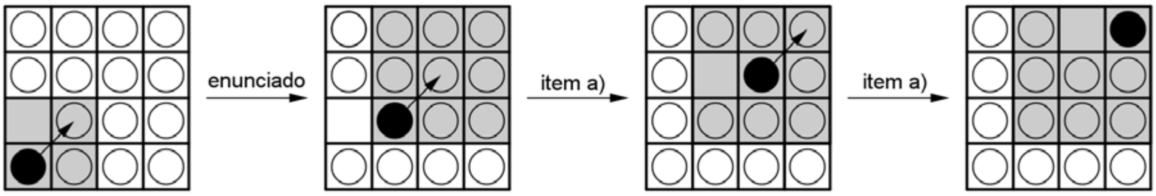


b) A figura abaixo mostra que a sequência de quatro movimentos $(\uparrow,\leftarrow,\downarrow,\rightarrow)$ transforma a posição inicial dada na posição inicial do item a), a partir da qual é possível terminar o jogo em seis movimentos.



Assim, podemos terminar o jogo num total de $4+6=10$ movimentos.

c) A idéia é fazer a peça preta se mover ao longo da diagonal do tabuleiro. Isso pode ser feito uma casa de cada vez usando primeiro os movimentos do exemplo do enunciado seguidos da repetição dos movimentos do item a). Ilustramos isso abaixo em um tabuleiro 4×4.



Em geral, em um tabuleiro $n\times n$ a peça preta vai subir $n-1$ casas na diagonal; pelo método indicado, pode-se subir a primeira delas em 4 movimentos e cada uma das $n-2$ restantes em 6 movimentos cada uma. Logo pode-se acabar o jogo em $4+6(n-2)=6n-8$ movimentos.