OBMEP 2009 – 2ª fase – Soluções - Nível 2

Nível 2 questão 1

a) Para obter o maior número possível de três algarismos escondido por 47239, devemos primeiro fazer com que esse número tenha o maior algarismo possível na casa das centenas. Para isso, devemos apagar o 4 e deixar o 7 na casa das centenas. Após isso buscamos o maior algarismo possível na casa das dezenas; para isso apagamos o 2 e obtemos 739, que é o número procurado.

b) Como o número procurado esconde 2009, entre seus algarismos aparecem 2,0,0 e 9, nesta ordem. Analogamente, como ele esconde 9002 então entre seus algarismos aparecem 9,0,0 e 2 nesta ordem. Logo este número possui no mínimo seis algarismos: um 2 e um 9 à esquerda de dois 0's e um 2 e um 9 à direita dos mesmos. Há exatamente quatro números de seis algarismos deste tipo, a saber, 290029, 290092, 920029 e 920092. O menor deles é 290029, que é o número procurado. Notamos que não é necessário pesquisar números de sete ou mais algarismos, pois eles são todos maiores que 290029.

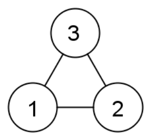
c) Uma primeira idéia é encontrar um múltiplo de 2009 que termina em 3, o que é imediato: $7\times 2009 = 14063$. Esta não é a resposta procurada, pois 14063 não esconde 2009. Mas 200900000 é múltiplo de 2009, e então

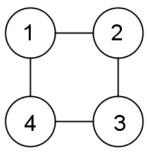
$$200914063 = 200900000 + 14063 = 100000\times 2009 + 7\times 2009 = 100007\times 2009$$

é um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e termina em 3.

Nível 2 questão 2

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3\times 2\times 1 = 6$ maneiras diferentes.





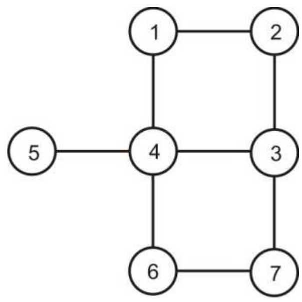
b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times 2\times 2 = 12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times 2\times 1 = 6$.

No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.

c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18\times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

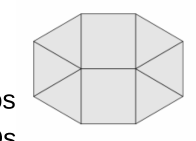


1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1\times 2 = 2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

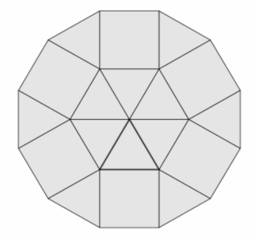
No total, há $36\times 2 + 36\times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

Nível 2 questão 3



a) Um exemplo de polígono elegante com oito lados aparece à direita.

b) Como um polígono *elegante* é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a 60^o ou 90^o que não ultrapassem 180^o. Os valores possíveis são então 60^o, 90^o, $120^o = 60^o + 60^o$ e $150^o = 60^o + 90^o$.

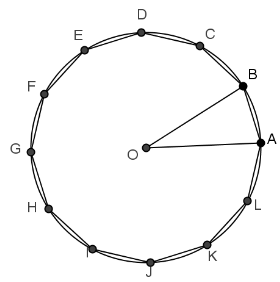


c) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com *n* lados é $(n-2)\times 180^o$. Por outro lado, vimos no item (b) que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é 150^o; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de *n* lados é no máximo $n \times 150^o$. Temos então $180(n-2) \leq 150n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.

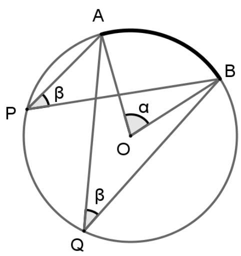
d) A figura à esquerda mostra um polígono elegante de 12 lados.

Nível 2 questão 4

a) Como a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é $(n-2)\times 180^o$, a soma dos ângulos internos do dodecágono é $(12-2)\times 180^o = 1800^o$. Logo cada um de seus ângulos internos mede $\frac{1800^o}{12} = 150^o$.



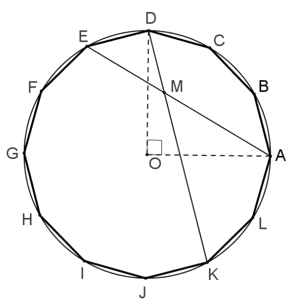
Outra solução usa a circunferência de centro *O* circunscrito ao polígono. O ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. O triângulo *OAB* é isósceles, pois *OA* e *OB* são iguais, como raios da circunferência. Logo $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Pela simetria da figura, temos também $O\hat{A}L = 75^\circ$, e então $B\hat{A}L = 2\times 75^\circ = 150^\circ$.

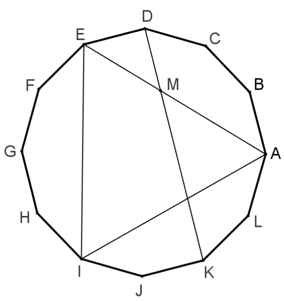


Antes de prosseguir, lembramos um resultado básico de geometria elementar. Dados uma circunferência de centro *O* e um arco $\overset{\frown}{AB}$ nesta circunferência (marcado em traço mais forte na figura à esquerda), temos o *ângulo central* $A\hat{O}B$ associado a este arco. Seja *P* um ponto qualquer na circunferência que não pertence a $\overset{\frown}{AB}$. Então a medida do *ângulo inscrito* $A\hat{P}B$ é a metade da medida do ângulo $O\hat{A}B$, independente da posição de *P*. A figura à esquerda ilustra esta situação; nela temos

$$\beta = A\hat{P}B = A\hat{Q}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}\alpha$$

b) *1ª solução*: Consideremos outra vez a circunferência de centro *O* circunscrita ao polígono. Como *E* e *K* são diametralmente opostos, o ângulo $E\hat{D}K$ está inscrito na semicircunferência e segue que $E\hat{D}K = 90^o$. Como o ângulo central correspondente a um lado do dodecágono regular é $\frac{180^o}{12} = 30^o$, o ângulo central $A\hat{O}D$ mede 90^o, e segue que $A\hat{E}D = 45^o$. Finalmente, o triângulo *EDM* tem ângulos $E\hat{D}M = 90^o$ e $M\hat{E}D = 45^o$; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que $D\widehat{M}E = 180^o - (90^o + 45^o) = 45^o$.





2ª solução: O triângulo *IAE* é equilátero, pois seus vértices estão igualmente espaçados no polígono regular; em particular $A\hat{E}I = 60^o$. Além disso, os ângulos $A\hat{E}D$ e $F\hat{E}I$ são iguais (pois correspondem aos arcos iguais $\overset{\frown}{ACD}$ e $\overset{\frown}{FHI}$), donde

$$150^o = F\hat{E}D = F\hat{E}I + I\hat{E}A + A\hat{E}D = 60^o + 2\times A\hat{E}D$$

e obtemos $A\hat{E}D = 45^o$. Agora basta argumentar como na primeira solução para obter $E\hat{D}M = 90^o$ e $D\widehat{M}E = 45^o$.

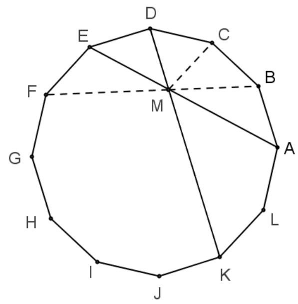
3ª solução: A medida do ângulo $A\hat{E}D = E\widehat{A}B$ (por simetria) também pode ser obtida através da soma dos ângulos do polígono de cinco lados *AEDCB*; temos

$$A\hat{E}D + E\widehat{A}B + 3\times 150^o = (5-2)\times 180^o = 540^o$$

e então $2\times A\hat{E}D = 90^o$, donde $A\hat{E}D = 45^o$. A partir daí a solução procede como nas anteriores.

c) Como o triângulo *EDM* tem dois ângulos de 45^o, ele é isósceles; logo $MD = DE$, ou seja, *MD* tem a mesma medida que os lados do polígono. Como $E\hat{D}C = 150^o$ e $E\hat{D}M = 90^o$, temos $M\hat{D}C = 60^o$; e como $MD = DC$ segue que o triângulo *MDC* é equilátero. Em particular, temos $M\hat{C}D = 60^o$ e segue que $M\hat{C}B = 90^o$. Finalmente, como $MC = CB$, o triângulo *MCB* é isósceles e então $M\hat{B}C = B\hat{M}C = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$.

d) Temos $F\hat{B}C = 45^o = M\hat{B}C$. Logo os segmentos *FB* e *MB* fazem o mesmo ângulo com o segmento *BC*, e segue que os pontos *B*, *M* e *F* estão alinhados.



Outra solução é como segue. No quadrilátero *BCDM* temos $M\hat{B}C = 45^\circ$, $B\hat{C}M = 150^\circ$ e $M\hat{D}C = 60^o$; como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, segue que $B\widehat{M}D = 360^\circ - (45^\circ + 150^\circ + 60^\circ) = 105^\circ$. Analogamente, no quadrilátero *MDEF* temos $F\widehat{M}D = 360^\circ - (90^\circ + 150^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$. Logo $F\widehat{M}B = F\widehat{M}D + D\widehat{M}B = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, e segue que os pontos *B*, *M* e *F* estão alinhados.

Nível 2 questão 5

a) Lembrando que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, podemos simplificar a expressão $(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2$ como segue:

$$\begin{aligned}(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2 &= 9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 + 16x + 4 - 25x^2 - 20x - 4 \\ &= (9+16-25)x^2 + (6+16-20)x + (1+4-4) = 2x+1.\end{aligned}$$

b) Aqui temos

$$(3x-m)^2 + (4x-n)^2 - (5x-5)^2 = -(6m+8n-50)x + (m^2+n^2-25) = 2x$$

e desse modo devemos encontrar inteiros *m* e *n* tais que $m^2 + n^2 - 25 = 0$ e $-(6m+8n-50) = 2$, isto é, $m^2 + n^2 = 25$ e $3m + 4n = 24$. A primeira equação (que também pode ser obtida pela substituição $x = 0$ na identidade) tem as possíveis soluções em números inteiros:

m	0	± 3	± 4	± 5
n	± 5	± 4	± 3	0

Verificação direta mostra que apenas os valores $m = 4$ e $n = 3$ satisfazem a segunda equação.

c) Do enunciado temos $4^2 + 7^2 - 8^2 = 1$. Multiplicando esta expressão por 2^2, obtemos $2^2{\cdot}4^2 + 2^2{\cdot}7^2 - 2^2\,8^2 = 4$, ou seja, $8^2 + 14^2 - 16^2 = 4$, o que mostra que 4 é simpático. Outras expressões são $4 = 5^2 + 10^2 - 11^2 = 6^2 + 7^2 - 9^2 = 7^2 + 22^2 - 23^2$ e, mais geralmente, $4 = (3k+4)^2 + (4k+2)^2 - (5k+4)^2$ para $k > 2$.

d) Vamos dividir o argumento para números ímpares e pares.

Números ímpares: seja $n = 2k+1$ um número ímpar maior que 1, ou seja, com $k > 0$. O item (a) mostra que fazendo $a = 3k+1$, $b = 4k+2$ e $c = 5k+2$ temos $n = a^2 + b^2 - c^2$. Notamos que $a < b < c$; de fato, $a < b$ é imediato e $b < c$ decorre de $k > 0$. Como já sabemos que 1 é simpático, segue que todo número ímpar positivo é simpático.

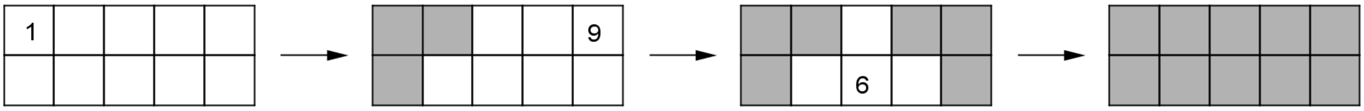
Números pares: seja $n = 2k$ um número par maior que 4, ou seja, com $k > 2$. Aqui o item (b) mostra que fazendo $a = 3k - 4$, $b = 4k - 3$ e $c = 5k - 5$ temos $n = a^2 + b^2 - c^2$. Notamos que $a < b < c$; de fato, $a < b$ vem do fato de k ser positivo e $b < c$ decorre de $k > 2$. Como já sabemos que 2 e 4 são simpáticos, segue que todo número par positivo é simpático. Concluímos então que todos os inteiros positivos são simpáticos.

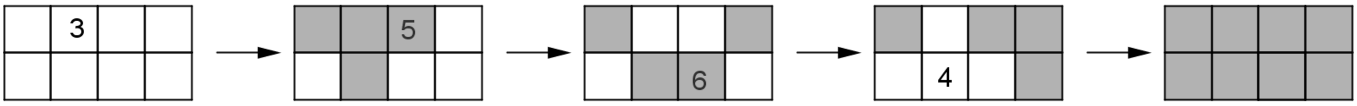
Uma curiosidade aqui é uma fórmula geral (entre outras) que mostra que todo número positivo n é simpático:

$$n = (n+3)^2 + \left(\frac{n^2+5n+8}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2+5n+8}{2}+1\right)^2 .$$

Nível 2 questão 6

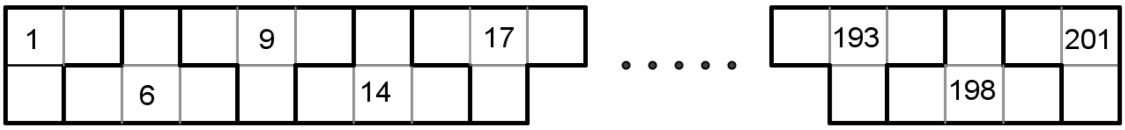
a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.





b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornarmos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item (a); notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.

c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas 1, 9, 17,... , 193, 201 e na segunda as casas 6, 14, 22,..., 190, 198. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.

d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50 \times 4 = 200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.

Observação: A solução dos itens (b) e (c) mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2 \times n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).