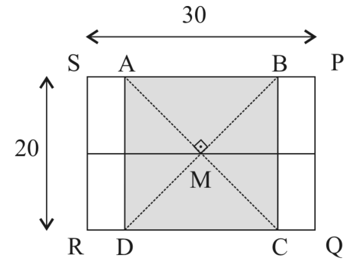
OBMEP 2006
SOLUÇÕES DA 2ª FASE
NÍVEL 2

Problema 1

a) Vamos representar a folha original pelo retângulo *PQRS*, e vamos considerar o quadrilátero *ABCD* como na figura ao lado. A idéia é verificar que *ABCD* é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: *ABCD* é um quadrilátero cujas diagonais



- são iguais (porque $AC = BD$),
- se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como *ABCD* é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20$ cm.

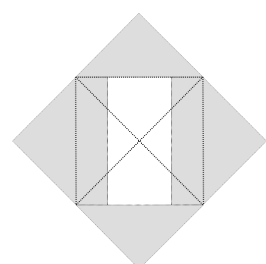
b) Seja *M* o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos *AMB*, *BMC, CMD* e *DAM* é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado *ABCD*, que é $20 \times 20 = 400$ cm^2; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100$ cm^2.

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600$ cm^2 ; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares *ABM* e *DMC*, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}^2.$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30-10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é 100 cm^2 e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100$ cm^2, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200$ cm^2.

c) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800$ cm^2. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm^2 .



Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento *AB*, ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200$ cm^2.

Problema 2

a) O Capitão Rodrigo escreveu a letra *Q* em baixo dos quadrados perfeitos $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$. Como 2006 está entre 44^2 e 45^2, isto é,

$$44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2,$$

vemos que 1936 é o maior quadrado perfeito que é menor do que 2006.

$1^2 \downarrow$			$2^2 \downarrow$		$44^2 \downarrow$				
1	2	3	4	......	1936	1937	1938	......	2006
Q	*N*	*N*	*Q*	......	*Q*	*N*	*N*	......	*N*
						só letras *N*			

Logo última letra *Q* foi escrita embaixo do número 1936, ou seja, o Capitão Rodrigo escreveu a letra *Q* um total de 44 vezes.

b) O número 1000 está entre $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, logo, até 1024ª posição foram escritas 32 letras *Q* e $1024 - 32 = 992$ letras *N*.

			$31^2 \downarrow$				$32^2 \downarrow$					$33^2 \downarrow$
1	2	......	961	......	1000	......	1024	1025	......	1032	......	1089
Q	*N*	......	*Q*	......	*N*	......	*Q*	*N*	......	***N***	......	*Q*
				só letras *N*				só letras *N*				

Por isso, a 1000ª letra *N* aparece depois da 1024ª posição. Para chegar a 1000 letras *N* faltam 8, que começam na 1025ª posição e acabam na 1032ª posição; notamos que nessas posições não aparece nenhuma letra *Q*, pois o próximo quadrado perfeito é $33^2 = 1089$. Logo o 1000º *N* foi escrito na 1032ª posição.

$$\underbrace{\overset{1}{Q}NN\overset{4}{Q}NNNN\overset{9}{Q}N\ldots\ldots N\overset{1024}{Q}}_{1024\text{ letras } = 992\text{ letras } N\, +\, 32\text{ letras } Q}\ \underbrace{\overset{1025}{N}\ NNNNNN\ \overset{1032}{N}}_{8\text{ letras } N}\ldots$$

c) *1ª solução*: Para que ocorra uma seqüência da forma $Q\overbrace{NNN\ldots NNN}^{100\text{ letras } N}Q$, o primeiro e o último *Q* correspondem a quadrados consecutivos, com 100 números não quadrados entre eles. Se o primeiro *Q* corresponde a a^2, temos

$$\overset{a^2}{\underset{\downarrow}{}}Q\overbrace{NNN\ldots NNN}^{100\text{ letras } N}\ \overset{(a+1)^2}{\underset{\downarrow}{}}Q \qquad \text{e} \qquad \underbrace{[(a+1)^2 - a^2] - 1}_{\substack{\text{número de letras } N\\ \text{entre}\\ \text{as duas letras } Q}} = 100\,.$$

Logo $[(a+1)^2 - a^2] - 1 = 100$, donde

$$(a^2 + 2a + 1 - a^2) - 1 = 2a + 1 = 100$$

ou seja, $2a = 100$ e portanto $a = 50$. Assim , a seqüência é

$$\overset{50^2}{\underset{\downarrow}{}}Q\ \overbrace{NNN\ldots NNN}^{100 \text{ letras } N}\ \overset{51^2}{\underset{\downarrow}{}}Q\ .$$

Como $50^2 = 2500$ é maior do que 2006, essa seqüência não ocorre na tabela dada.

Observação: A resposta 2500 também foi considerada correta para efeito de correção.

2ª solução: Os blocos de letras *N* entre quadrados perfeitos crescem de 2 em 2, como podemos ver abaixo:

$$\overset{1}{Q}\ \underbrace{NN}_{2 \text{ letras } N}\ \overset{4}{Q}\ \underbrace{NNNN}_{4 \text{ letras } N}\ \overset{9}{Q}\ \underbrace{NNNNNN}_{6 \text{ letras } N}\ \overset{16}{Q}\ \underbrace{NNNNNNNN}_{8 \text{ letras } N}\ \overset{25}{Q}\ \underbrace{NNNNNNNNNN}_{10 \text{ letras } N}\ \overset{36}{Q}\ldots\ \overset{a^2}{Q}\ \underbrace{NNN\ldots NNN}_{2n \text{ letras } N}\ \overset{(a+1)^2}{Q}\ \underbrace{NNN\ldots NNN}_{(2n+2) \text{ letras } N}\ \overset{(a+2)^2}{Q}\ \ldots$$

Os dois últimos quadrados perfeitos na tabela são $43^2 = 1849$ e $44^2 = 1936$, entre os quais há 86 letras *N*. Por outro lado, de 1937 a 2006 há 70 letras *N*:

$$\overset{1}{Q}NN\overset{4}{Q}\ldots\ldots\ \overset{1849}{Q}\ \underbrace{N\ldots N}_{86 \text{ letras } N}\ \overset{1936}{Q}\ \underbrace{\overset{1937}{N}\ \ldots\ldots\ \overset{2006}{N}}_{70 \text{ letras } N}$$

Como os blocos de letras *N* entre quadrados perfeitos são de tamanho crescente, segue que em nenhum lugar da tabela aparecem 100 letras *N* seguidas

Problema 3

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1+2+6+4=13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7\times 13+9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer "o que falta". Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

$$\begin{array}{r|c} \text{dividendo (comprimento da corrida)} & \text{13 (divisor)} \\ \cline{2-2} \text{resto ("o que falta")} & \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13\times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

Extensão em km	***Posto de partida***	***Posto de chegada***
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

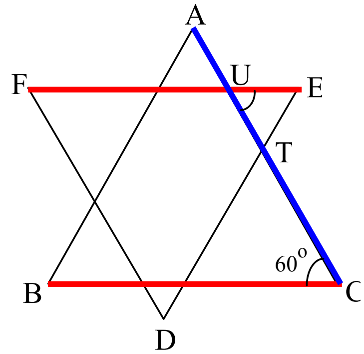
A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

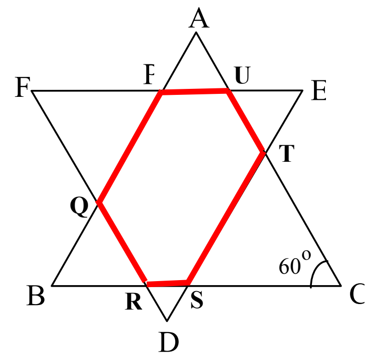
2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida.Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

Problema 4

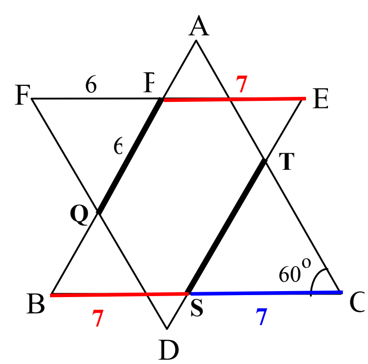


a) Como o triângulo ABC é eqüilátero, todos seus ângulos internos medem 60^o. Como BC e EF são paralelos e cortados pela tranversal AC, os ângulos $E\widehat{U}T$ e $A\widehat{C}B$ são alternos internos, donde $E\widehat{U}T = A\widehat{C}B = 60^o$.



b) Como DEF é um triângulo eqüilátero, temos que $U\widehat{E}T = 60^o$, e do item (a) sabemos que $E\widehat{U}T = 60^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que $U\widehat{T}E = 180^o - 2 \times 60^o = 60^o$. Logo, o triângulo EUT é eqüilátero, porque todos os seus ângulos internos medem 60^o. Da mesma forma, podemos concluir que todos os outros triângulos da figura são eqüiláteros. Desse modo, temos $QP = FP$, $UT = UE$, $TS = CS$ e $RQ = RB$. Segue que o perímetro de $PQRSTU$ é

$$\begin{aligned} QP + PU + UT + TS + SR + RQ &= (FP + PU + UE) + (CS + SR + RB) \\ &= FE + CB = 13 + 14 = 27 \text{ cm} \end{aligned}$$



c) De $PQ = 6$ cm segue que $FP = 6$ cm, pois o triângulo QFP é eqüilátero, e concluímos que $PE = FE - FP = 13 - 6 = 7$ cm. Como BC é paralelo a EF e AB é paralelo a DE, o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7$ cm. Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14 - 7 = 7$ cm; logo $ST = SC = 7$ cm, pois o triângulo TCS é equilátero.

Uma solução análoga pode ser dada a partir do paralelogramo $QDTA$.

Problema 5

a) A maior soma possível de nove números dentre os escritos nos cartões é $19+18+\cdots+11=135$. Portanto, a soma dos números escritos nos cartões de Ana não pode ser igual a 136.

b) Sejam A, B e P as somas dos números dos cartões de Ana, Bibiana e Pedro Missionário, respectivamente. Do enunciado temos $A = B + 90$ e do item anterior temos $A \le 135$. Logo $B + 90 \le 135$ e portanto $B \le 135 - 90 = 45$

Por outro lado, como Bibiana tem 9 cartões, segue que $B \ge 1+2+\cdots+9 = 45$. Vamos então que $B \le 45$ e $B \ge 45$, donde $B = 45$ e então $A = 45 + 90 = 135$. Logo os cartões que estão com Ana são os de números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, pois na situação do problema esses são os únicos números cuja soma é 135. Analogamente, concluímos que os cartões que estão com Bibiana são os de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Logo, Pedro tem o cartão de número 10.

Problema 6

a) A solução é feita em seis passos, assinalado cada um deles em vermelho.

1º passo

1	2		
3	4		
	3	1	
			2

2º passo

1	2		
3	4	2	
	3	1	
	1		2

3º passo

1	2		
3	4	2	1
	3	1	4
	1		2

4º passo

1	2		3
3	4	2	1
2	3	1	4
			2

5º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1		2

6º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

b) Não. No quadradinho assinalado com X não podemos colocar nem o 3 nem o 4 porque a 2ª linha já contém esses números. Por outro lado também não podemos colocar nem 1 nem 2 porque a última coluna já contém esses números.

1	2		
3	4		X
			2
			1

c) De acordo com o item (b), temos quatro opções para preencher o quadrado D, que são

3	4
2	1

4	3
2	1

2	3
4	1

2	4
3	1

Como no item (b), vemos que opção sombreada não é possível, uma vez que não teremos como preencher o quadradinho assinalado com X.

1	2		
3	4		
	X	3	1

Logo, para preencher o quadrado D só restam as 3 opções

2	**3**
4	1

3	**4**
2	1

4	**3**
2	1

Uma vez preenchido o quadrado D, os quadrados B e C podem ser preenchidos de modo único. Logo, temos 3 maneiras para completar o quadrado original, que são

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
4	**1**	**2**	**3**
2	**3**	**4**	1

1	2	**4**	**3**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**2**	1

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**2**	1

d) Para preencher o quadrado A, na ordem crescente 1, 2, 3 e 4 temos a seguinte situação:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 posições;
- colocado o 1, temos 3 posições para o 2;
- colocados o 1 e o 2, temos 2 posições para o 3;
- colocados o 1, o 2 e o 3 temos apenas uma posição para o 4.

Logo, o quadrado A pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

Preenchido o quadrado A, vamos agora preencher o quadrado D:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas;
- uma vez colocado o 1, usando o mesmo argumento que no item (c), vemos que existem 3 meneiras de completar o quadrado D.

Logo, temos $24 \times 4 \times 3 = 288$ modos de preencher os quadrados A e D. Sabemos que, estando esses dois quadrados preenchidos, só temos uma maneira de preencher os quadrados B e C. Logo, o número total de quadrados especiais é 288.