Questão 1

a) O número-parada de 93 é 4, pois $93 \to 9\times 3 = 27 \to 2\times 7 = 14 \to 1\times 4 = 4$.

b) Escrevendo $3\times 2 = 6$ vemos que $32 \to 3\times 2 = 6$. Como $32 = 4\times 2\times 2\times 2$, temos
$4222 \to 4\times 2\times 2\times 2 = 32 \to 3\times 2 = 6$
e assim o número-parada de 4222 é 6, bem como de 2422, 2242 e 2224.

Outra alternativa é escrever $1\times 6 = 6$, o que nos dá $16 \to 1\times 6 = 6$; como $2\times 2\times 2\times 2 = 16$ segue que
$2222 \to 2\times 2\times 2\times 2 = 16 \to 1\times 6 = 6$
e vemos que o número-parada de 2222 também é 6.

Pode-se também pensar a partir de $48 \to 4\times 8 = 32 \to 3\times 2 = 6$; como $48 = 4\times 12 = 4\times 2\times 2\times 3$ vemos que 2234, 2324,…, 4322 também possuem 6 como número-parada.

c) Há apenas duas maneiras de obter 2 multiplicando dois algarismos, a saber, $12 \to 1\times 2 = 2$ e $21 \to 2\times 1 = 2$. Para obter 12, temos as possibilidades $26 \to 2\times 6 = 12$, $62 \to 6\times 2 = 12$, $34 \to 3\times 4 = 12$ e $43 \to 4\times 3 = 12$; para obter 21, temos as possibilidades $37 \to 3\times 7 = 21$ e $73 \to 7\times 3 = 21$. Como os números 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73 não podem ser obtidos como produto de dois algarismos, concluímos que os números de dois algarismos cujo número-parada é 2 são 12, 21, 26, 62, 34, 43, 37 e 73.

Questão 2

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:
1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;
2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;
3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;
4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.
Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é $3\times 2 = 6$; o resultado da segunda conta é $6 + 3 = 9$ e o da terceira conta é $9\times 5 = 45$. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é $45 + 4 = 49$. Assim Joãozinho deve dizer "Quarenta e nove" ao matemágico.

b) *1ª solução:* Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, após a terceira conta obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Concluimos então que, todas as contas estando corretas, o algarismo das unidades do número dito ao matemático é

- 1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;
- 2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;
- 4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.

Desse modo, se Mariazinha disse 76 ao matemágico, seu cartão era verde e o resultado da terceira conta realizada por ela foi $76 - 1 = 75$; o resultado da segunda conta foi $75 \div 5 = 15$; o resultado da primeira conta foi $15 - 3 = 12$ e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi $12 \div 2 = 6$. Conferindo: $(2\times 6 + 3)\times 5 + 1 = 76$.

2ª solução: Essa solução não difere essencialmente da anterior, mas é mais precisa e permite uma solução imediata do item c). Como antes, vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, ao multiplicar por 2 obtemos um número par; ao somar 3 ao resultado, obtemos um número ímpar (esse é o detalhe em que essa solução difere da anterior). Ao multiplicar por 5, obtemos um número cujo algarismo das unidades é 5. Concluimos então que, todas as contas estando corretas, o último algarismo do número dito ao matemático é

- 6, se o cartão escolhido é verde;
- 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 8, se o cartão escolhido é azul;
- 9, se o cartão escolhido é vermelho.

O restante dessa solução procede como a anterior.

3ª solução (algébrica): Seja x o número de um cartão; então o número dito ao matemágico é $5(2x+3)+y=10x+15+y$, onde y é um número inteiro de 1 a 4 correspondendo à cor do cartão. Temos aqui $10x+15+y=76$, ou seja, $10x+y=61$. Como o dígito das unidades de $10x$ é 0, vemos que y só pode ser 1; logo $10x=60$, donde $x=6$ e concluímos que o cartão escolhido foi o 6 verde.

c) *1ª solução (de acordo com a 1ª solução do item b)):* Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi $61-1=60$, depois da segunda conta o número obtido foi $60\div 5=12$, depois da primeira conta o número obtido foi $12-3=9$ e então o número no cartão deve ser $9\div 2=4{,}5$, o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

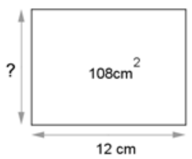
2ª solução (de acordo com a 2ª solução do item b)): Dizer ao matemágico um número cujo algarismo das unidades é diferente de 6, 7, 8 ou 9 indica que houve algum erro de conta.

3ª solução: Para simplificar, vamos chamar de "resultado" de um cartão o número que deve ser dito ao matemágico por uma criança que escolha esse cartão. Observamos que entre cartões de mesmo número, o verde tem o menor resultado e o vermelho o maior. Por outro lado, o resultado do cartão 1 vermelho é $(1\times 2+3)\times 5+4=29$ e o do 2 verde é $(2\times 2+3)\times 5+1=36$, o resultado do 2 vermelho é $(2\times 2+3)\times 5+4=39$ e o do 3 verde é $(2\times 3+3)\times 5+1=46$, e assim por diante; isso mostra que, entre cartões de números diferentes, o cartão que tem o maior número tem também o maior resultado, independente da cor. Como o resultado do cartão 4 vermelho é $(2\times 4+3)\times 5+4=59$ e o do 5 verde é $(2\times 5+3)\times 5+1=66$, um cartão cujo resultado fosse 61 deveria ter número maior que 4 e menor que 5, o que não pode acontecer.

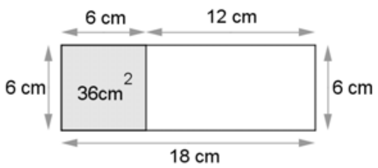
Questão 3

Para orientar a solução, lembramos que a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes; em particular, a área de um quadrado é igual ao quadrado de seu lado.

a) Como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, indicado por **?** na figura ao lado, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108,ou seja, é $108\div 12=9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12+12+9+9=42$ cm.



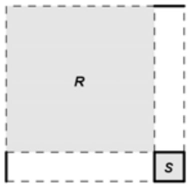
Solução algébrica: Seja x o comprimento do lado indicado por **?** na figura. Então $12x=108$ e, como antes, temos $x=108\div 12=9$; o cálculo do perímetro é idêntico ao feito acima.



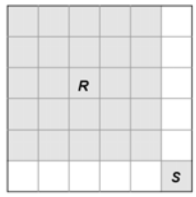
b) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede $108\div 6=18$ cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18-6=12$ cm, e assim seu perímetro é $12+12+6+6=36$ cm.

Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108-36=72$ cm^2; como um de seus lados mede 6 cm, o outro mede então $72\div 6=12$ cm; o restante da solução segue como acima.

Solução algébrica: O lado do quadrado, que mede 6 cm, é um lado do retângulo branco e também do retângulo maior. Seja x o outro lado do retângulo branco; então o outro lado do retângulo maior tem comprimento $x+6$ cm. Como sua área é 108 cm^2, segue que $6(x+6)=108$, ou seja, $6x+36=108$. Logo $6x=108-36=72$ e segue que $x=72\div 6=12$. O cálculo do perímetro do retângulo branco segue como acima.



c) Na figura ao lado marcamos os lados do quadrado *R* em pontilhado e os lados do quadrado *S* em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como "grosso", e do mesmo modo para "pontilhado". O perímetro do quadrado *S* é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um desses retângulos é igual a três vezes o perímetro de *S*, isto é, igual a doze grossos. Logo os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.



Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado *S*, como na figura ao lado. Como a área do quadrado maior é igual a 108 cm^2, a área de um desses quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3$ cm^2. Finalmente, o quadrado *R* consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3 = 75$ cm^2.

Solução algébrica: Primeiro argumentamos, como acima, que os retângulos brancos são iguais. Seja agora x o lado do quadrado *S* (grosso) e y o lado do quadrado *R* (pontilhado). O perímetro de *S* é então $4x$ e o de um retângulo branco é $2x + 2y$; o enunciado nos diz que $2x + 2y = 3 \times 4x = 12x$, donde $2y = 10x$ e então $y = 5x$. Logo o lado do quadrado grande mede $x + 5x = 6x$; como sua área é 108 cm^2 temos $108 = 6x \times 6x = 36x^2$, donde $x^2 = 3$. A área de *R* é então $y^2 = (5x)^2 = 25x^2 = 25 \times 3 = 75$ cm^2.

<u>Questão 4</u>

a) O número que forma um casal com 2010 é 7989, pois ambos possuem 4 dígitos e sua soma é $2010 + 7989 = 9999$.

b) Existem noventa números com dois dígitos, a saber, os números de 10 a 99. Desses números, só não possuem par aqueles que começam com 9, ou seja, os dez números de 90 a 99. Logo, oitenta números com dois dígitos têm par para formar um casal, e portanto existem quarenta casais distintos com dois dígitos.

c) Damos a seguir três exemplos de casais especiais: (2376, 7623), (5814, 4185) e (8901,1098).

d) *1ª solução:* Vamos supor que exista um casal especial de números com três algarismos. Sejam *A* o algarismo das centenas, *B* o algarismo das dezenas e *C* o algarismo das unidades de um dos números desse casal; esse número é então *ABC*, onde notamos que *A* não é igual a 0. Esses são também os algarismos do segundo número do casal, que pode então ser *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB* ou *CBA*. Temos então as seis possibilidades a seguir:

$$\begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & A & C & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & B & A & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & B & C & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & C & A & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & C & B & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

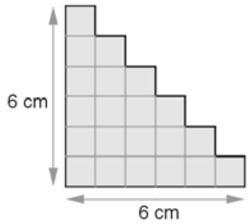
A primeira possibilidade não pode ocorrer, pois $A + A = 9$ é impossível. De modo similar, eliminamos a segunda, a terceira e a última possibilidade. Na quarta possibilidade temos $B + C = 9 = A + C$ e segue que $A = B$, o que não pode acontecer, pois em um casal especial os algarismos são distintos. O mesmo argumento elimina a quinta possibilidade, e concluímos que não existem casais especiais com números de três algarismos.

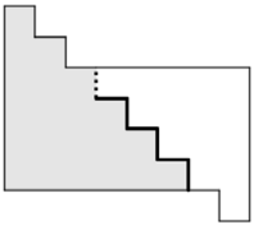
2ª solução: Suponhamos que exista um casal especial com números de três algarismos e sejam *A*, *B* e *C* os algarismos desses números. Cada algarismo de um dos números somado com algum algarismo do segundo número tem 9 como resultado; assim devemos ter $A + A + B + B + C + C = 2(A + B + C) = 27$, o que não pode acontecer pois 27 é ímpar. Logo não existem casais especiais com números de três algarismos.

3ª solução: Suponhamos que exista um casal especial de números de três algarismos. Como 9 não é soma de dois pares ou dois ímpares e a soma dos integrantes do casal é 999 e, entre seus algarismos das centenas um é par e o outro é ímpar, e o mesmo vale para os algarismos das dezenas e das unidades. Logo o número de algarismos pares de um dos dois é igual ao número de algarismos ímpares do outro. Como os dois integrantes do casal têm os mesmos algarismos concluimos que em qualquer um deles o número de algarismos pares é igual ao número de algarismos ímpares, o que não pode acontecer pois eles possuem apenas três algarismos. Esse argumento mostra que não existem casais especiais com integrantes que tenham um número ímpar qualquer de algarismos.

Questão 5

a) Ao lado vemos que a figura cinzenta tem como contorno um segmento horizontal de 6 cm, um segmento vertical de 6 cm, seis segmentos horizontais de 1 cm e seis segmentos verticais de 1 cm; logo seu perímetro é $6+6+6\times 1+6\times 1=4\times 6=24$ cm. Vemos também que ela pode ser decomposta em $1+2+3+4+5+6=21$ quadradinhos de área 1; logo sua área é 21 cm^2.

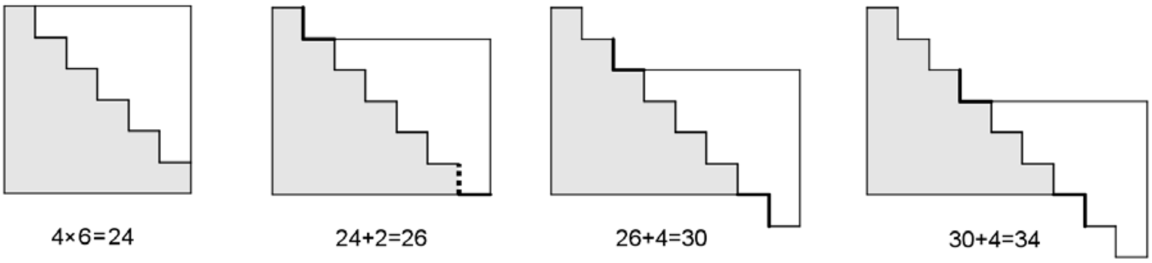




b) A área da figura é a soma das áreas das partes branca e cinzenta. Como essas duas partes formam o quadrado original, sua área total é $6\times 6=36$ cm^2. Para o perímetro, vamos oferecer duas soluções distintas, observando que ele também pode ser calculado diretamente por observação da figura.

1ª solução: O perímetro da parte cinza é $4\times 6=24$ cm e o da parte branca é $4\times 5=20$ cm; separadamente, essas peças teriam um perímetro total de $20+24=44$ cm. Ao encaixar as peças como no enunciado, elas passam a ter em comum dois segmentos em cada degrau encaixado, que indicamos com traço mais grosso, e um segmento indicado em pontilhado; o número de segmentos comuns é então $2\times 3+1=7$. Para cada segmento comum "perdemos" 2 cm do perímetro total, num total de $2\times 7=14$ cm. Logo o perímetro da figura é $44-14=30$ cm.

2ª solução: Vamos considerar a seqüência de figuras abaixo.



O perímetro do quadrado original é $4\times 6=24$ cm. Na segunda figura, descemos um degrau, "ganhamos" os segmentos em traço mais grosso e "perdemos" o segmento pontilhado. Assim, o perímetro aumentou de $3-1=2$ cm e passou a ser $24+2=26$ cm. Após isso, ao descer um degrau sempre "ganhamos" os quatro segmentos em traço mais grosso, ou seja, o perímetro aumenta 4 cm a cada degrau descido depois do primeiro; em particular, a terceira figura tem perímetro 30 cm, que é a resposta correta a esse item. Observamos também que ao descer o primeiro degrau o número de degraus encaixados continua o mesmo e, após isso, diminui de um a cada degrau descido. Nossas observações podem ser resumidas na tabela abaixo:

degraus "descidos"	degraus encaixados	perímetro	aumento no perímetro
0	4	24	
1	4	26	2
2	3	30	4
3	2	34	4

A observação dessa tabela nos mostra que, se o número de degraus descidos for maior que 0, temos

$$\textit{degraus encaixados} + \textit{degraus descidos} = 5$$

$$perímetro = 22 + 4 \times (número\ de\ degraus\ descidos)$$

c) *1ª solução:* Quando o comprimento do lado é 87 cm, a parte cinza tem perímetro igual a $4 \times 87 = 348$ cm e a parte branca tem perímetro $4 \times 86 = 344$ cm, num total de $348 + 344 = 692$ cm. O mesmo raciocínio da 1ª solução do item anterior mostra que o perímetro da figura obtida encaixando 39 degraus é então $692 - 2 \times (2 \times 39 + 1) = 534$ cm.

2ª solução: De acordo com a 2ª solução do item anterior, temos

$$degraus\ encaixados + degraus\ descidos = 86$$

$$perímetro = 346 + 4 \times (número\ de\ degraus\ descidos)\ .$$

Como o número de degraus encaixados é 39, o número de degraus "descidos" é $86 - 39 = 47$ e o perímetro da figura é $346 + 4 \times 47 = 534$ cm.

Questão 6

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2 \times 45 = 90$. Logo a soma que está faltando é $90 - (9+13+14+17+18) = 90 - 71 = 19$.

b) *1ª solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª solução: Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1,3,5,7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado.

O seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7,16, 22 e 13,14,18; podemos então supor que as somas das linhas são 7,16,22 e as somas das colunas são 13,14,18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas , (troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.