Nível 1 questão 1

a) Há apenas três maneiras de escrever 1 como soma de três números naturais: $1=1+0+0$, $1=0+1+0$ e $1=0+0+1$, que nos dão as possibilidades 1001, 0101 e 0011. Os números 0101 e 0011 devem ser descartados, pois não têm quatro algarismos significativos. Logo na coleção do Joãozinho aparece o número 1001.

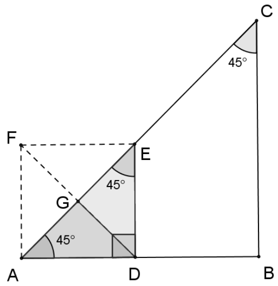
b) Primeiro notamos que se um número com algarismos não nulos está na coleção, então ele tem no máximo 10 algarismos. De fato, se ele tivesse 11 ou mais algarismos não nulos então a soma de todos seus algarismos, exceto o das unidades, seria no mínimo 10, o que não é possível pois o maior algarismo é o 9. Logo todos os números com algarismos não nulos na coleção têm no máximo 10 algarismos, o que mostra que existe um maior número sem o 0 na coleção.

Vamos supor que a coleção do Joãozinho está completa. O número 2316 está na coleção; trocando o 3 por 111 obtemos 211116, que também está na coleção e é maior que 2316, pois tem mais algarismos. Em geral, se um número sem o algarismo 0 está na coleção e tem algum algarismo que não o das unidades diferente de 1, podemos "espichar" o número, trocando esse algarismo por uma sequência de 1's e obtendo um novo número, que está na coleção e é maior que o primeiro. Logo o maior número com algarismos não nulos na coleção deve ter todos seus algarismos iguais a 1, com exceção do algarismo das unidades, que é igual ao número de 1's que o precedem. Como o maior algarismo das unidades possível é 9, segue que o número procurado é $\underbrace{111111111}_{\text{nove 1's}}9$.

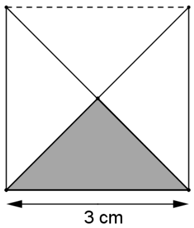
Notamos que a coleção pode ter números arbitrariamente grandes com o algarismo 0, como (por exemplo) 101, 1001, 10001 e assim por diante.

c) Um número da coleção não pode ter seis algarismos distintos, pois nesse caso a soma dos cinco algarismos à esquerda do algarismo das unidades seria no mínimo $0+1+2+3+4=10$. Por outro lado, a coleção pode ter números de cinco algarismos distintos como, por exemplo, 25108. Se um destes números tem o algarismo das unidades diferente de 9, podemos "aumentá-lo" adicionando 1 ao algarismo das unidades e 1 ao algarismo das dezenas de milhares (que, claramente, não pode ser 9), sem sair da coleção. Por exemplo, o número 43108 pode ser "aumentado" para 53109, que também está na coleção. Logo o maior número de cinco algarismos distintos na coleção deve ter 9 como algarismo das unidades. Basta agora escrever 9 como soma de quatro parcelas distintas em ordem decrescente para "montar" nosso número; segue imediatamente que a decomposição procurada é $9=6+2+1+0$ e obtemos o número 62109.

Nível 1 questão 2



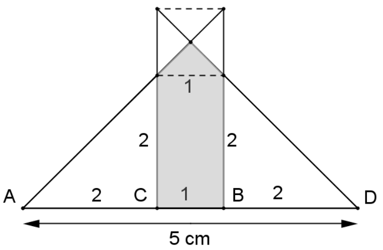
O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado ao lado. O triângulo *ABC* é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e *D* é um ponto qualquer no lado *AB*, com *DE* perpendicular a *AB*. O triângulo *ADE* também é retângulo com dois lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado *ADEF*; a área do triângulo *ADG* é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado *ADEF*.



a) O argumento acima mostra que a região cinza (à esquerda) tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3 cm, ou seja, $\frac{1}{4}\times 3^2=\frac{9}{4}=2{,}25\,\text{cm}^2$.

Podemos também usar a fórmula da área de um triângulo. A altura relativa ao lado de 3cm mede a metade do lado do quadrado, ou seja, $\frac{3}{2}$ cm. A área da região cinza é então

$$\textit{área}=\frac{\textit{base}\times\textit{altura}}{2}=\frac{3\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{4}\,\text{cm}^2.$$



b) Aqui a área da região cinza (à direita) é $\frac{1}{4}\times 1^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25\,\text{cm}^2$. Alternativamente, podemos usar a fórmula para a área de um triângulo para obter

$$\textit{área} = \frac{\textit{base}\times\textit{altura}}{2} = \frac{1\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\,\text{cm}^2.$$

c) *1ª solução:* Como $AB = CD = 3\text{cm}$ e $AD = 5\text{cm}$, vemos que $BC = 1\text{cm}$, e podemos então marcar os comprimentos indicados na figura. A região cinza é a união de um retângulo de base 1cm e altura 2cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo a área da região cinza é $1\times 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\text{cm}^2$.

2ª solução: A região cinza é um retângulo de base 1 e altura 3 da qual se retiram três triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área de um quadrado de lado 1. A área procurada é então $3\times 1 - 3\times\frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\text{cm}^2$.

Nível 1 questão 3

a) Como sobrou o cartão de número 7 e Ana e Cristina só tiraram cartões ímpares, seus cartões foram 1, 3, 5 e 9; logo, a soma de seus pontos foi $1+3+5+9=18$. Beatriz e Diana tiram os cartões 2, 4, 6 e 8, cuja soma é $2+4+6+8=20$; podemos também ver este total como

$$\underbrace{45}_{\text{total dos cartões}} - \underbrace{18}_{\text{pontos de Ana e Cristina}} - \underbrace{7}_{\text{carta que ficou na mesa}} = 20.$$

Logo Beatriz e Diana ganharam por 20 a 18.

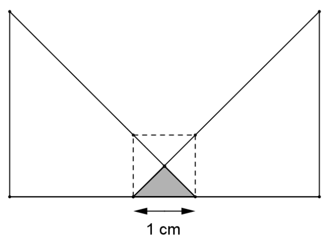
b) A soma dos valores de todos os cartões é $1+2+\cdots+9=45$; se o 8 fica na mesa então, para que a partida termine empatada, $45-8=37$ (ou então $1+2+3+4+5+6+7+9=37$) pontos devem ser divididos igualmente pelas duas duplas, o que é impossível pois 37 é um número ímpar. Mais geralmente, se sobra um cartão de número par na mesa, a soma dos pontos das duplas é $45 - \textit{número par} = \textit{número ímpar}$, e não pode haver empate neste caso.

c) Quando sobra o cartão de número 5, a soma dos pontos das duplas é $45-5=40$, que é um número par. Se nesse caso uma partida termina empatada, cada dupla deve ter feito $\frac{40}{2}=20$ pontos. Para argumentar que o empate pode realmente acontecer nessa situação, é necessário exibir uma partida que termine empatada em 20 a 20; um exemplo é quando uma dupla retira os cartões de números 1, 2, 8 e 9 e a outra retira os restantes.

d) *1ª solução:* O cartão com menor número que pode sobrar é 1 e o maior é 9. Logo, a soma dos pontos feitos pelas duas duplas varia de $45-9=36$ a $45-1=44$, ou seja, os pontos das meninas são quatro números consecutivos cuja soma está entre 36 e 44. As possibilidades {1,2,3,4}, {2,3,4,5}, {3,4,5,6}, {4,5,6,7}, {5,6,7,8}, {6,7,8,9} e {7,8,9,10} não servem pois, em qualquer delas, a soma dos números é menor que 36. Analogamente {10,11,12,13}, {11,12,13,14}, {12,13,14,15}, {13,14,15,16} e {14, 15, 16, 17} não servem pois, em qualquer caso, a soma dos números é maior que 44.

Restam as possibilidades {8,9,10,11} e {9,10,11,12}. No primeiro caso, o cartão que ficou na mesa é o de número $45-(8+9+10+11)=7$ e no segundo é o de número $45-(9+10+11+12)=3$. Como o cartão que ficou na mesa não foi o de número 3, só resta a primeira possibilidade; concluímos que Ana fez 8 pontos, Beatriz fez 9, Cristina fez 10 e Diana fez 11. A dupla que venceu foi Beatriz e Diana, com $9+11=20$ pontos contra $8+10=18$ de Ana e Cristina.

2ª solução (com um pouco de álgebra, que pode estar fora do alcance de alunos do nível 1): Se x é a pontuação de Ana, então $x+1$, $x+2$ e $x+3$ são as pontuações de Beatriz, Cristina e Diana, respectivamente. Logo a soma dos pontos das duas duplas é $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x+6$, que como vimos no parágrafo anterior é no mínimo 36 e no máximo 44. Logo $36\le 4x+6\le 44$, ou seja, $30\le 4x\le 38$ e concluímos que $7{,}5\le x\le 9{,}5$. Logo $x=8$ ou $x=9$ são os possíveis números de



pontos de Ana. Se $x = 8$ estamos no caso {8,9,10,11}, quando sobra o cartão de número $45-(8+9+10+11)=7$, e para $x = 9$ estamos no caso {9,10,11,12}, quando sobra o cartão de número $45-(9+10+11+12)=3$. O restante do argumento segue como no parágrafo anterior.

3ª solução (também algébrica): após chegar a $4x+6$ como na solução anterior, notamos que $4x+6$ é par para qualquer *x*; como o total de pontos é 45, deve sobrar um cartão ímpar entre 1, 5, 7 e 9, casos em que a soma dos pontos deve ser 44, 42, 40, 38 e 36, respectivamente. Das equações $4x+6=44$, $4x+6=40$, $4x+6=38$ e $4x+6=36$ apenas a terceira tem solução inteira, que é $x=8$. O restante da solução segue como acima.

Notamos que há apenas duas partidas que satisfazem as condições do enunciado; elas estão descritas nas linhas da tabela abaixo, que mostram os cartões de cada menina

Ana	Beatriz	Cristina	Diana
2 e 6	4 e 5	1 e 9	3 e 8
3 e 5	1 e 8	4 e 6	2 e 9

Nível 1 questão 4

a) *1ª solução:* A superfície do sólido é igual à soma das superfícies dos cubos menos a área “perdida” no contato entre eles, que é igual a duas vezes a área de uma face do cubo menor. Assim, a área do sólido obtido é $6\times20\times20+6\times10\times10-2\times10\times10=2400+600-200=2800\text{cm}^2$. Como Pedro gasta 1mL de tinta para pintar 100 cm^2, então ele vai gastar $\frac{2800}{100}=28\text{mL}$ de tinta para pintar a superfície do sólido.

2ª solução: Cada face do cubo maior tem $20\times20=400\text{cm}^2$. Assim, Pedro gastará $\frac{400}{100}=4\text{mL}$ de tinta para pintar cada face do cubo maior; analogamente, ele gastará 1mL de tinta para pintar cada face do cubo menor. Logo ele gastará $6\times4+6\times1-2\times1=28\text{mL}$ de tinta para pintar todo o sólido.

b) Para pintar uma das faces do cubo, Pedro gastou $\frac{54}{6}=9\text{mL}$ de tinta. O corte criou duas novas superfícies, cada uma com área igual à de uma das faces do cubo; para pintar estas duas superfícies Pedro deve gastar $2\times9=18\text{mL}$ de tinta.

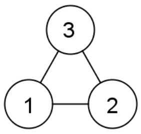
c) *1ª solução:* Para dividir o cubo em cubinhos iguais, devem ser feitos cortes paralelos às faces e igualmente espaçados. Como vimos no item (b), cada um destes cortes cria 1800 cm^2 de superfície não pintada. Portanto, o número de cortes foi $\frac{21600}{1800}=12$. Como os cubinhos são iguais, os cortes horizontais, verticais e longitudinais devem ser todos de mesmo número, ou seja, em número de $\frac{12}{3}=4$. Esses cortes dão origem a 5 camadas horizontais, verticais e longitudinais de cubinhos, e segue que o cubo original foi dividido em $5\times5\times5=125$ cubinhos.

2ª solução (com álgebra, que pode estar fora do alcance de alunos do n1): Como acima, concluímos que a aresta do cubo mede 30cm, logo cada face tem $9\times100=900\text{cm}^2$. Pedro gastou $54+216=270\text{mL}$ de tinta no total, logo ele pintou 27.000cm^2. É intuitivo que o número de camadas horizontais, verticais e longitudinais é o mesmo, que chamamos de *n*. A quantidade de cubinhos é então n^3 a aresta de um cubinho mede $\frac{30}{n}\text{cm}$. Logo a área de uma face de um cubinho é $\frac{30}{n}\times\frac{30}{n}=\frac{900}{n^2}cm^2$, e temos

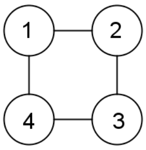
$$27000=\underbrace{6\times\frac{900}{n^2}}_{\text{área total das faces de um cubinho}}\times n^3=5400\times n.$$

Segue que $n=5$ e então o número de cubinhos é $5^3=125$.

Nível 1 questão 5



a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3\times2\times1=6$ maneiras diferentes.

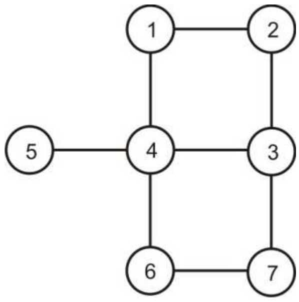


b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times2=12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times1=6$.

No total, a figura 2 pode ser pintada de $12+6=18$ maneiras diferentes.



c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18\times2=36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

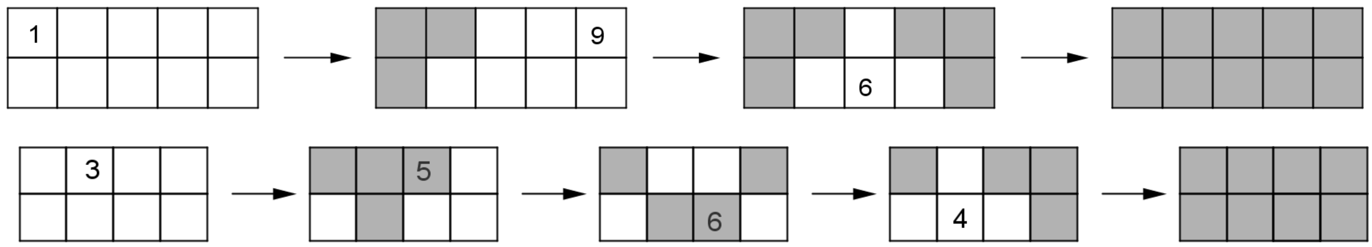
1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1\times2=2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há $36\times2+36\times1=108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

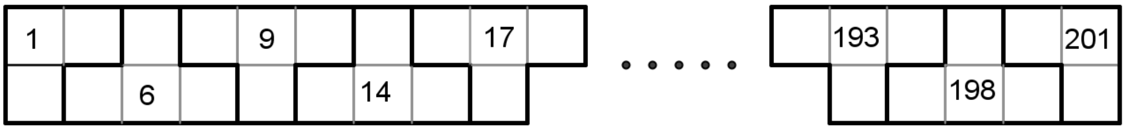
Nível 1 questão 6

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornarmos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item (a); notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.

c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas 1, 9, 17,... , 193, 201 e na segunda as casas 6, 14, 22,..., 190, 198. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.

d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50\times4=200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.

Observação: A solução dos itens (b) e (c) mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2\times n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).