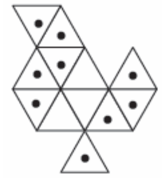
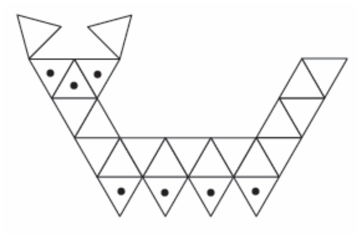
## OBMEP 2008 - 2ª FASE - Soluções – Nível 1

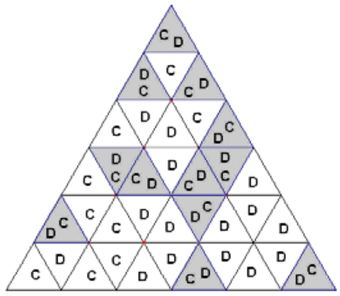
### QUESTÃO 1



a) A figura é composta de 12 triângulos iguais. Como $\frac{3}{4}$ de 12 é $\frac{3}{4}\times 12 = 9$, devemos marcar 9 triângulos quaisquer, como ao lado (por exemplo).



b) A figura é composta de 24 triângulos iguais. Como $\frac{1}{4}$ de 24 é igual 6 e $\frac{1}{3}$ de 24 é igual a 8, concluímos que o número de triângulos a serem pintados é um número maior do que 6 e menor do que 8. Logo devem ser marcados 7 triângulos quaisquer, como ao lado (por exemplo).

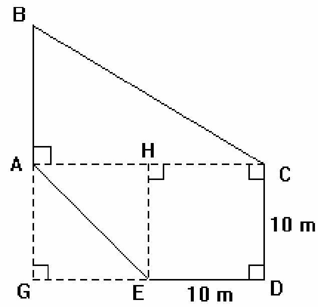


c) *1ª solução*: A figura é composta de 36 triângulos iguais. Chico Bento escreveu **C** em $\frac{7}{12}\times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu **D** em $\frac{3}{4}\times 36 = 27$ triângulos, totalizando assim $21 + 27 = 48$ marcas. Como todos os triângulos foram marcados e só existem 36 deles, concluímos que o número de triângulos marcados com duas letras é igual a $48 - 36 = 12$. Este número corresponde a $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ dos triângulos.

*2ª solução*: A figura é composta de 36 triângulos iguais. Chico Bento escreveu **C** em $\frac{7}{12}\times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu **D** em $\frac{3}{4}\times 36 = 27$ triângulos. Chico Bento deixou $36 - 21 = 15$ triângulos em branco. Doralina, ao marcar seus 27 triângulos, preencheu estes 15 e mais $27 - 15 = 12$ triângulos, que ficaram então com duas marcas.

*3ª solução:* Chico Bento e Doralina marcaram juntos $\frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{7+9}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ dos triângulos. Como $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, segue que o número de triângulos marcados duas vezes é $\frac{1}{3}$ do total, ou seja, é igual a $\frac{1}{3}\times 36 = 12$ triângulos.

**QUESTÃO 2**




a) *1ª solução*: A figura ao lado mostra como decompor a região *ACDE* em um quadrado *CDEH* e um triângulo *AGE*. Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. Logo a área do triângulo *AGE* é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é

$$\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}^2.$$

Como a área do quadrado *CDEH* é $10^2 = 100\,\text{m}^2$, concluímos que a área da região *ACDE* é $100 + 50 = 150\text{ m}^2$.

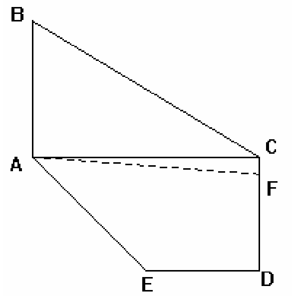
Alternativamente, podemos calcular a área de *ACDE* como a diferença entre as áreas do retângulo *ACDG* e do triângulo *AHE*, ou seja, $20 \times 10 - \dfrac{10 \times 10}{2} = 150\text{ m}^2$.

*2ª solução*: Podemos calcular a área do trapézio retângulo *ACDE* pela fórmula usual

$$\frac{(AC + DE) \times CD}{2} = \frac{(20 + 10) \times 10}{2} = 150\,\text{m}^2$$

A área total do terreno é então

$$\text{área}(ACDE) + \text{área}(ABC) = 150 + 120 = 270\text{ m}^2.$$




b) *1ª solução*: Como o terreno tem 270 $\text{m}^2$, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de

$$\frac{270}{2} = 135\text{ m}^2.$$

Desse modo, devemos ter

$$135 = \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) = 120 + \text{área}(ACF)$$

e vemos que $\text{área}(ACF) = 15\text{ m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo *ACF* é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF.$$

Portanto $10 \times CF = 15$ e logo $CF = 1{,}5\text{ m}$.

*2ª solução*: Como o terreno tem 270 $\text{m}^2$, ao dividí-lo nas partes de mesma área *ABCF e AFDE,* cada parte terá área de 135 $\text{m}^2$. Notamos que *ABCF* é um trapézio de bases *AB* e *CF* e de altura $AC = 20$; logo

$$135 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12 + CF) \times 20}{2} = 120 + 10 \times CF$$

e segue que $CF = 1{,}5$.

## QUESTÃO 3

*No que segue, por "número" queremos dizer "número de até nove algarismos".*

a) Consideremos um número cujo resumo seja 523. Então ele tem cinco dígitos ($\boxed{5}23$), dos quais dois são ímpares ($5\boxed{2}3$) e três são pares ($52\boxed{3}$). Podemos formar muitos números satisfazendo estas condições; alguns exemplos são 11222, 23456 e 36854.

b) Como o resumo de qualquer número tem três algarismos, vemos que para que um número seja igual ao seu próprio resumo é necessário que ele tenha três algarismos. Suponhamos então que exista um número que seja seu próprio resumo, e sejam $c$ seu algarismo das centenas, $d$ o das dezenas e $u$ o das unidades.

Como o algarismo das centenas do resumo de um número de três algarismos é 3, devemos ter $c = 3$. Somando os algarismos das dezenas e das unidades do resumo devemos obter o número de algarismos do número original, ou seja, $d + u = 3$. Logo as possibilidades para o resumo de um resumo são 303, 312, 321 ou 330; destes, o único que é seu próprio resumo é o 321, que é então o número procurado.

c) O resumo de um número tem sempre três algarismos. Como vimos no item (b), as possibilidades para o resumo de um número de três algarismos são 303, 312, 321 ou 330; logo as possibilidades para o resumo do resumo de qualquer número estão entre estas quatro. Os resumos de 303, 312, 321 ou 330 são todos iguais a 321. Como 321 tem como resumo ele mesmo, sempre chegaremos a ele quando calculamos sucessivas vezes o resumo de um número. Mais precisamente, para qualquer número inicial, o resumo do resumo de seu resumo é 321. Podemos visualizar este raciocínio no diagrama abaixo.

$$\text{número} \xrightarrow{\text{resumo}} \text{número de três algarismos} \xrightarrow{\text{resumo}} 303,\ 312,\ 321 \text{ ou } 330 \xrightarrow{\text{resumo}} 321$$

*Observação*: notamos que o resumo do resumo de qualquer número só pode ser 303 ou 321. De fato, da primeira vez que calculamos o resumo de algum número obtemos um número de três dígitos *cdu,* com $d + u = c$. Temos então dois casos:

*c é par:* neste caso *d* e *u* são ambos pares ou ambos ímpares.

- se *d* e *u* são pares, o próximo resumo será 303;
- se *d* e *u* são ímpares, o próximo resumo será 321.

ou

*c é ímpar:* neste caso *d* é par e *u* é ímpar, ou *d* é ímpar e *u* é par.

- se *d* é par e *u* é ímpar, o próximo resumo será 321;
- *se d* é ímpar e *u* é par, o próximo resumo será 321.

**QUESTÃO 4**

a) Aqui estão três soluções, entre outras:

$$123456 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{65432}1 \xrightarrow{\text{troca}} 1\boxed{65432}$$

$$\boxed{1}23456 \xrightarrow{\text{troca}} 23456\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 165432$$

$$\boxed{12}3456 \xrightarrow{\text{troca}} 3456\boxed{12} \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{2}16543 \xrightarrow{\text{troca}} 16543\boxed{2}$$

b) Existem 5 números diferentes formados com os algarismos 1, 2 e 3, além de 123. Eles são 132, 213, 231, 312 e 321. Vamos mostrar como obter todos a partir de 123:

$$\boxed{1}23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 132$$

$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{3}21 \xrightarrow{\text{troca}} 21\boxed{3}$$

$$\boxed{1}23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\boxed{1}$$

$$\boxed{12}3 \xrightarrow{\text{troca}} 3\boxed{12}$$

$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} 321$$

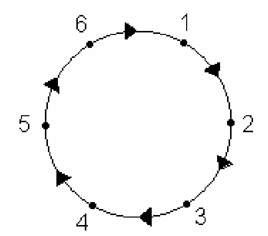
Pode-se também obter todos estes números através de uma única seqüência de *troca* e *inverte* ; por exemplo,

$$12\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} 31\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{2}31 \xrightarrow{\text{inverte}} 13\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} 21\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{3}21$$

c) Em um número qualquer formado com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos os algarismos das “pontas” e os do “meio”; por exemplo, em 621354 os algarismos das pontas são 6 e 4 e os algarismos 2, 1, 3, e 5 estão no meio. Dizemos também que dois algarismos são *vizinhos* se um está ao lado do outro; no exemplo em questão, (2,1) e (3,5) são dois pares de vizinhos.

O movimento *inverte* troca os algarismos das pontas e mantém os vizinhos juntos. O movimento *troca* faz com que as pontas se tornem vizinhos e separa um par de vizinhos, fazendo com que eles se tornem pontas. Logo, começando com 123456, vemos que qualquer seqüência de movimento *troca* e *inverte* tem como resultado um número em que 1 e 6 são ou pontas ou vizinhos; como isso não acontece com 243156, é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.

Alternativamente, podemos pensar nos algarismos do número 123456 escritos ao longo de um círculo orientado no sentido horário, como na figura ao lado. O movimento *inverte* muda o sentido de rotação deste ciclo e o movimento *troca* mantém este sentido; por outro lado, algarismos vizinhos, em particular o 1 e o 6, permanecem sempre vizinhos após qualquer destes movimentos. Como em 243156 o 1 e o 6 não são vizinhos, concluímos que é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.

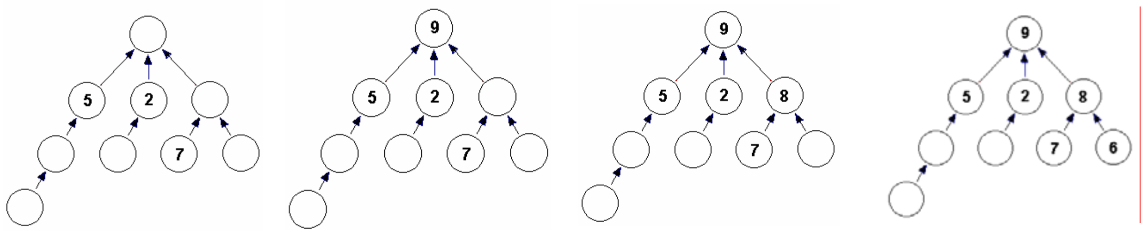


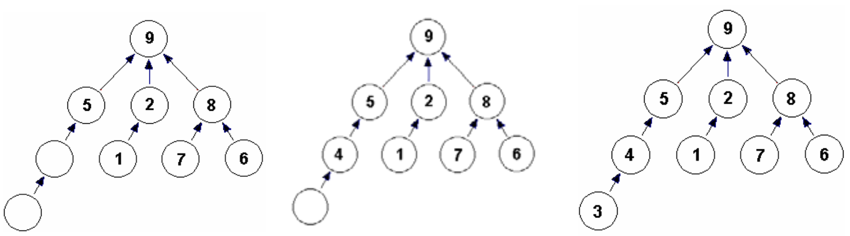
## QUESTÃO 5

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

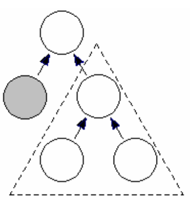
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

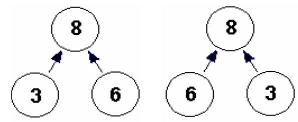
A seqüência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.





b) *1ª solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.





Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

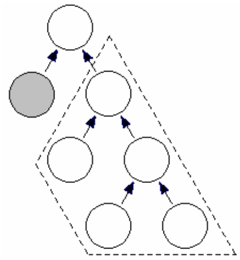
- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4\times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

*2ª solução*: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.



c) *1ª solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

- preenchemos o círculo do topo com o 7**:** 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6**:** 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

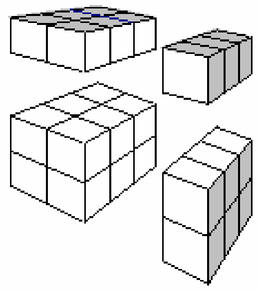
Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 6\times 8=48$ maneiras diferentes.

*2ª solução*: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos $5\times 8=40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $8+40=48$ maneiras diferentes.

## QUESTÃO 6

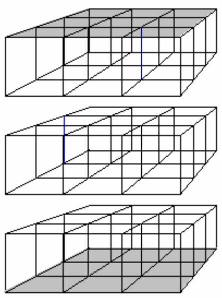


a) O cubo tem $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubinhos. Na figura ao lado mostramos o que acontece quando pintamos duas faces do cubo com uma aresta comum. Temos

- 12 cubinhos com apenas uma face pintada, sendo 6 na face de cima e outros 6 na face direita;
- 3 cubinhos, que formam a aresta comum das duas faces pintadas;
- um bloco de cubinhos sem nenhuma face pintada, com 2 cubinhos de comprimento, 2 de altura e 3 de profundidade.

Podemos agora pensar de duas maneiras diferentes para saber quantos são os cubinhos sem nenhuma face pintada:

- o bloco de cubinhos sem nenhuma face pintada tem $2 \times 2 \times 3 = 12$ cubinhos; ou
- o número de cubinhos com pelo menos uma face pintada é $6 + 3 + 6 = 15$, donde o número de cubinhos sem faces pintadas é $27 - 15 = 12$.



b) Na figura ao lado, mostramos o que acontece quando pintamos duas faces opostas do cubo. Observamos que cada camada tem $1 \times 3 \times 3 = 9$ cubinhos; duas destas camadas têm todos seus cubinhos com uma face pintada e a terceira (a do meio) não tem nenhum cubinho com alguma face pintada. Como no item (a), podemos pensar de duas maneiras para saber quantos são os cubinhos sem nenhuma face pintada:

- o bloco de cubinhos sem nenhuma face pintada tem $1 \times 1 \times 9 = 9$ cubinhos; ou
- o número de cubinhos com pelo menos uma face pintada é $2 \times 9 = 18$, donde o número de cubinhos sem faces pintadas é $27 - 18 = 9$.

c) Como o cubo tem 64 cubinhos e $64 = 4 \times 4 \times 4$, concluímos que ao longo de cada aresta do cubo há 4 cubinhos e que cada face do cubo contém as faces de $4 \times 4 = 16$ cubinhos. Há duas possibilidades a considerar para pintar três faces de um cubo.

- duas das faces são opostas, como na figura 1 (mostramos apenas duas das três faces pintadas; a terceira está em baixo e é idêntica à de cima);
- as três faces possuem um vértice comum (figura 2).

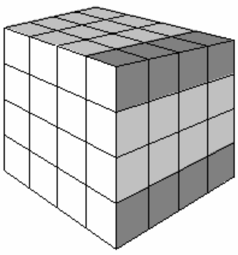


**figura 1**

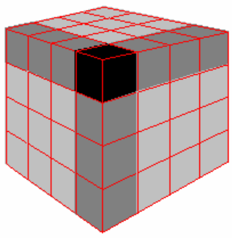


**figura 2**

Vamos agora contar, em cada caso, quantos cubinhos não têm nenhuma face pintada .

Na figura 1, vemos em cinza claro as faces de 32 cubinhos (12 em cima, 8 na lateral e 12 em baixo), e em cinza escuro as de 8 cubinhos. O número de cubinhos com nenhuma face pintada é então $64 - (32 + 8) = 24$. Alternativamente, podemos notar que se eliminarmos os cubinhos com pelo menos uma face pintada ficaremos com um bloco que tem $3 \times 2 \times 4 = 24$ cubinhos.

Na figura 2, vemos em cinza claro as faces de 27 cubinhos, em cinza escuro as de 9 cubinhos e em preto as de 1 cubinho. O número de cubinhos com nenhuma face pintada é então $64 - (27 + 9 + 1) = 27$. Alternativamente, podemos notar que se eliminarmos os cubinhos com pelo menos uma face pintada ficaremos com um bloco que tem $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubinhos.

d) *1ª solução*: A partir do que foi observado nos itens anteriores, podemos concluir ao pintar uma face do cubo diminui-se em uma unidade uma das dimensões do bloco de cubinhos sem faces pintadas. Desta forma, qualquer dimensão desse bloco é uma ou duas unidades menor que a dimensão do cubo; em particular, estas dimensões diferem, duas a duas, de no máximo duas unidades. No nosso caso, devemos escrever 96 como o produto de três números inteiros que diferem entre si de no máximo duas unidades. Por tentativa e erro ou através da decomposição em fatores primos de 96, vemos que a única maneira de escrever 96 desse modo é $96 = 4 \times 4 \times 6$. Como 4 é um dos fatores, a dimensão máxima possível do cubo é 6; e como 6 é um dos fatores, segue que a dimensão mínima possível do cubo também é 6. Logo a dimensão do cubo é 6; segue que o cubo pintado por Xaveco tem $6 \times 6 \times 6 = 216$ cubinhos e que ele pintou 4 faces do cubo.

*2ª solução*: Um cubo $4 \times 4 \times 4$ tem 64 cubinhos, menos que o número de cubinhos sem faces pintadas; logo o cubo que Xaveco pintou tem no mínimo $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos.

Em um cubo de $5 \times 5 \times 5$ cubinhos, uma face pintada deixa $125 - 25 = 100$ cubinhos sem nenhuma face pintada. Uma segunda face pintada contribuirá com mais 20 cubinhos com uma face pintada (no caso em que ela tiver uma aresta em comum com a primeira face pintada) ou com mais 25 cubinhos (no caso em que ela for paralela à face já pintada). Desse modo, após pintar a segunda face o número de cubinhos sem nenhuma face pintada será de no máximo $100 - 20 = 80$. Segue que o cubo não pode ser $5 \times 5 \times 5$.

Em um cubo de $7 \times 7 \times 7$ ou mais cubinhos, mesmo se pintarmos todas as faces sobra um "miolo" de no mínimo $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos sem nenhuma face pintada. Logo o cubo não pode ser $7 \times 7 \times 7$ ou maior.

Concluímos que Xaveco pintou um cubo de $6 \times 6 \times 6 = 216$ cubinhos. Pelo menos 4 faces foram pintadas, pois caso contrário o número de cubinhos sem nenhuma face pintada seria no mínimo $216 - 3 \times 36 = 108$. Por outro lado, ao pintar 5 faces do cubo sobra um bloco de $5 \times 4 \times 4 = 80$ cubinhos sem nenhuma face pintada. Logo Xaveco pintou exatamente 4 faces do cubo.