OBMEP 2006
SOLUÇÕES DA 2ª FASE
NÍVEL 1

Problema 1

a) A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura I, vemos que

- as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm;
- os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm.

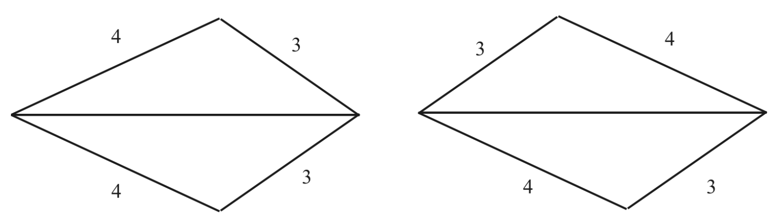
Portanto os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.

Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm .

b) A solução segue do item (a), que fornece as medidas dos lados que não foram unidos. Logo

- o perímetro da figura I é $4+6+4+6=20$ cm;
- o perímetro da figura II é $6+4+3+4+(6-3)=20$ cm . Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.

c) Da maneira como Miguilim forma as figuras, ele conseguirá a de menor perímetro quando unir os lados maiores, isto é os de 6 cm (já que eles não contarão no cálculo do perímetro). Veja abaixo as duas figuras que ele pode formar assim. O perímetro de cada uma é $2\times3+2\times4=14$ cm.



Problema 2

a) Se Quim escolher as provas dos três primeiros bimestres, sua média anual será

$$\frac{10\times(20+6+32)}{20+10+40}=\frac{580}{70}\cong 8{,}3\,.$$

Já se ele escolher as provas dos três últimos bimestres sua média anual será

$$\frac{10\times(6+32+40)}{10+40+40}=\frac{780}{90}\cong 8{,}7\,.$$

(usamos o símbolo $\cong$ para indicar “aproximadamente”).

b) Como $\frac{20}{20}=1=100\%$, $\frac{6}{10}=0{,}6=60\%$, $\frac{32}{40}=0{,}8=80\%$ e $\frac{40}{40}=1=100\%$, a tabela com as porcentagens de acertos do Quim é

Bimestre	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**
Porcentagem de acertos	100	60	80	100

c) As provas com maior porcentagem de acertos são as do 1º, 3º e 4º bimestres, com porcentagens 100%, 80% e 100%, respectivamente. A média anual dessas provas é

$$\frac{10\times(20+32+40)}{20+40+40}=\frac{920}{100}=9{,}2\,.$$

Essa média é maior do que as médias anuais calculadas no item (a). Entretanto, há mais uma possibilidade: a média obtida com a escolha das provas do 1º, 2º e 4º bimestres, que é

$$\frac{10\times(20+6+40)}{20+10+40}=\frac{660}{70}\cong 9{,}4\,.$$

Logo o Quim não está certo, porque as provas com porcentagem de acertos 100%, 60% e 100%, são as que proporcionam a maior média anual.

Problema 3

a) Duas maneiras de mostrar que 22 é um supernúmero são $22 = 10 + 12$ e $22 = 11 + 11$; de fato

$$\underbrace{2+2}_{22} = 4 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{1+2}_{12} = \underbrace{1+1}_{11} + \underbrace{1+1}_{11}.$$

Três maneiras de mostrar que 25 é um supernúmero são $25 = 10 + 15$, $25 = 11 + 14$ e $25 = 12 + 13$; de fato

$$\underbrace{2+5}_{25} = 7 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{1+5}_{15} = \underbrace{1+1}_{11} + \underbrace{1+4}_{14} = \underbrace{1+2}_{12} + \underbrace{1+3}_{13}.$$

b) Apresentamos abaixo <u>todas</u> as maneiras possíveis de escrever 49 como soma de dois números de dois algarismos cada (colocando sempre a menor parcela à esquerda):

$$\begin{aligned} 49 &= 10 + 39 \\ 49 &= 11 + 38 \\ 49 &= 12 + 37 \\ &\vdots \\ 49 &= 24 + 25 \end{aligned}$$

Elas são em número de $24 - 10 + 1 = 15$, e qualquer uma delas pode ser usada para mostrar que 49 é um supernúmero; por exemplo

$$\underbrace{4+9}_{49} = 13 = \underbrace{1+7}_{17} + \underbrace{2+2}_{22}.$$

Logo é possível mostrar que 49 é um supernúmero de 15 maneiras diferentes.

c) Como 10 é o menor número de dois algarismos, então $10 + 10 = 20$ é o menor número de dois algarismos que pode ser escrito como soma de dois números de dois algarismos. Consideremos agora qualquer número x de dois algarismos, maior ou igual a 20, e vamos chamar de a seu o algarismo das dezenas e b seu o algarismo das unidades. Vamos agora pensar no número $x - 10$. Ele é pelo menos 10 (pois x é pelo menos 20), donde tem dois algarismos; seu algarismo das dezenas é $a - 1$ e seu algarismo das unidades é b, como podemos ver fazendo a subtração:

$$\begin{array}{rcc} & a & b \\ - & 1 & 0 \\ \hline & a-1 & b \end{array}$$

Então a expressão $x = 10 + (x - 10)$ mostra que x é um supernúmero, pois

$$\underbrace{a+b}_{x} = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{(a-1)+b}_{x-10}.$$

Um exemplo ajuda a entender melhor este raciocínio. Pensemos em $x = 38$; aqui temos

$$\begin{array}{r} 3\ 8 \\ -\ 1\ 0 \\ \hline 2\ 8 \end{array}$$

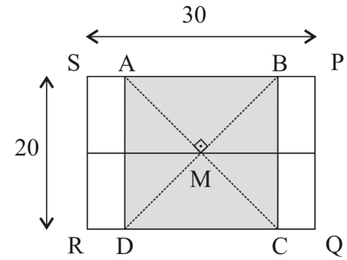
ou seja, $x - 10 = 28$. A expressão $x = 10 + (x - 10)$, neste caso, é $38 = 10 + 28$, que mostra que 38 é um supernúmero pois

$$\underbrace{3+8}_{38} = 11 = \underbrace{1+0}_{10} + \underbrace{2+8}_{38-10=28}$$

Logo, todos os números de 20 a 99 são supernúmeros, e eles são em número $99 - 20 + 1 = 80$.

Problema 4

a) Vamos representar a folha original pelo retângulo *PQRS*, e vamos considerar o quadrilátero *ABCD* como na figura ao lado. A idéia é verificar que *ABCD* é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: *ABCD* é um quadrilátero cujas diagonais



- são iguais (porque $AC = BD$),
- se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como *ABCD* é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20\,\text{cm}$.

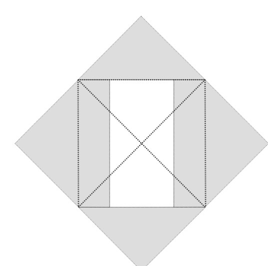
b) Seja *M* o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos *AMB*, *BMC, CMD* e *DAM* é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado *ABCD*, que é $20 \times 20 = 400\ \text{cm}^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\ \text{cm}^2$.

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\ \text{cm}^2$; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares *ABM* e *DMC*, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200\ \text{cm}^2.$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30-10}{2} = \frac{10}{2} = 5\ \text{cm}$. Como a área de cada triângulo é 100 cm^2 e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100\ \text{cm}^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200\ \text{cm}^2$.

c) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800\ \text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm^2 .



Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento *AB*, ou seja, $30 - 20 = 10\,\text{cm}$. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200\ \text{cm}^2$.

Problema 5

a) *1ª solução*: Como os três copos são iguais, o conteúdo de uma garrafa equivale a meio copo mais um terço do copo mais um quarto do copo , ou seja

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}=1+\frac{1}{12} \text{ de um copo}$$

Temos então que

$$1 \text{ garrafa equivale a } 1+\frac{1}{12} \text{ de um copo } (= 1 \text{ copo} + \frac{1}{12} \text{ de um copo})$$

$$2 \text{ garrafas equivalem a } 2\times\left(1+\frac{1}{12}\right)=2+\frac{2}{12}=2+\frac{1}{6} \text{ de um copo } (= 2 \text{ copos} + \frac{1}{6} \text{ de um copo})$$

$$3 \text{ garrafas equivalem a } 3\times\left(1+\frac{1}{12}\right)=3+\frac{3}{12}=3+\frac{1}{4} \text{ de um copo } (= 3 \text{ copos} + \frac{1}{4} \text{ de um copo})$$

Logo, para encher os 3 copos são necessárias no mínimo 3 garrafas (sobrando ainda $\frac{1}{4}$ de um copo na terceira garrafa). Portanto os amigos terão que abrir 2 garrafas a mais.

2ª solução: Depois de concluir que o conteúdo de uma garrafa é igual a $\frac{13}{12}$ de um copo, percebemos que falta encher $\frac{1}{2}$ do primeiro copo, $\frac{2}{3}$ do segundo copo e $\frac{3}{4}$ do terceiro copo, ou seja, falta encher $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{23}{12}$ de um copo. Como uma garrafa corresponde a $\frac{13}{12}$ de um copo, falta abrir $\frac{23/12}{13/12}=\frac{23}{13}=1+\frac{10}{13}$ garrafas. Logo será necessário abrir mais duas garrafas.

3ª solução: Abaixo estão representados os copos dos três amigos, divididos com marcas de $\frac{1}{12}$ avos.

O desenho mostra que três garrafas são suficientes para encher os copos, sobrando $\frac{1}{4}$ de um copo dentro da terceira garrafa para quem ainda estiver com sede.

b) Vimos no item (a) que uma garrafa enche $\frac{13}{12}$ de um copo. Logo, ao dividir o conteúdo de uma garrafa por três copos iguais, cada um dos amigos terá $\frac{13}{12} \div 3 = \frac{13}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{36}$ do seu copo cheio de suco.

Problema 6

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1+2+6+4=13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer "o que falta". Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo (comprimento da corrida)} & \text{13 (divisor)} \\ \hline \text{resto ("o que falta")} & \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13 \times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A
14	Qualquer um	O mesmo de partida

A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida.Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.