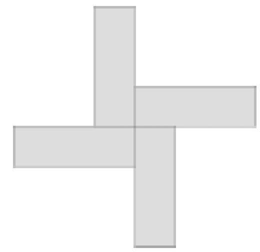
OBMEP – Nível 1 – 2ª Fase
Soluções

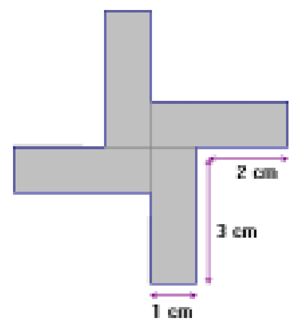
QUESTÃO 1 Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 *cm* de comprimento por 1 *cm* de largura, formando a figura ao lado.



A) Qual é o perímetro da figura?
B) Qual é o menor número de retângulos de 3 *cm* de comprimento por 1 *cm* de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.
C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?

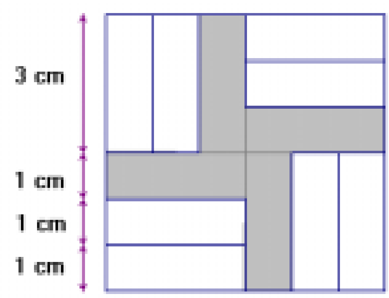
Solução:

A) *Solução 1:* Ao juntar os retângulos, cada um "perdeu" um lado de 1 cm e mais 1 cm em um lado de comprimento 3 cm, ou seja, 2 cm no total. Como o perímetro de cada retângulo é 8 cm, o perímetro da figura é $4 \times 8 - 4 \times 2 = 24$ cm.



Solução 2: A figura tem 4 lados de 3 cm, 4 lados de 2 cm e 4 lados de 1 cm, logo seu perímetro é $4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24$ cm.

B) A resposta está na figura ao lado, onde vemos que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar o quadrado.



C) *Solução 1*: Cada retângulo tem área igual a $3 \times 1 = 3$ cm^2. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a $12 \times 3 = 36$ cm^2.

Solução 2: Observando a figura, vemos que cada lado do quadrado tem comprimento igual a $3 \times 1 + 3 = 6$ cm. Portanto, sua área é $6 \times 6 = 36$ cm^2.

QUESTÃO 2 Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

1. Se o número escrito só tiver <u>um</u> algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
2. Se o número escrito tiver <u>mais de um</u> algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{dobra} 406 \xrightarrow{apaga} 40 \xrightarrow{apaga} 4 \ldots$$
$$4197 \xrightarrow{apaga} 419 \xrightarrow{dobra} 838 \xrightarrow{apaga} 83 \ldots$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Solução:

A) Há várias solucões, como por exemplo

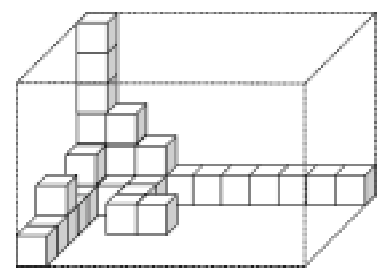
$$45 \xrightarrow{apaga} 4 \xrightarrow{dobra} 8 \xrightarrow{dobra} 16 \xrightarrow{apaga} 1$$
$$45 \xrightarrow{dobra} 90 \xrightarrow{apaga} 9 \xrightarrow{dobra} 18 \xrightarrow{apaga} 1.$$

B) Aqui também há várias soluções, como por exemplo

$$345 \xrightarrow{apaga} 34 \xrightarrow{apaga} 3 \xrightarrow{dobra} 6 \xrightarrow{dobra} 12 \xrightarrow{apaga} 1$$
$$345 \xrightarrow{apaga} 34 \xrightarrow{dobra} 68 \xrightarrow{apaga} 6 \xrightarrow{dobra} 12 \xrightarrow{apaga} 1$$

C) Aplicamos a regra "apaga" até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:
1. Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.
2. Este algarismo é 2, 3 ou 4 : neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.
3. Este algarismos é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra "dobra" uma vez, obtendo respectivamente 10,12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra "apaga" para obter o número 1.

QUESTÃO 3 Emília quer encher uma caixa com cubos de madeira de 5 cm de aresta.Como mostra a figura, a caixa tem a forma de um bloco retangular, e alguns cubos já foram colocados na caixa.



A) Quantos cubos Emília já colocou na caixa?
B) Calcule o comprimento, a largura e a altura da caixa.
C) Quantos cubos ainda faltam para Emília encher a caixa completamente, se ela continuar a empilhá-los conforme indicado na figura?

Solução:

A) *Solução 1*: Podemos contar os cubos em camadas a partir do fundo da caixa ; na primeira camada temos 14 cubos visíveis e 4 não visíveis, cuja existência é evidente pois há cubos sobre eles. Na segunda camada há 3 cubos visíveis e 1 oculto; a terceira camada tem 2 cubos, a quarta camada tem 3 cubos, a quinta camada tem 2 cubos e finalmente duas camadas de 1 cubo cada, totalizando $(14+4)+(3+1)+2+3+2+1+1=31$ cubos.

Solução 2: Podemos contar os cubos em camadas, a partir da parte de trás da caixa, à esquerda, por exemplo: na primeira camada temos 11 cubos, 3 deles não visíveis; na segunda camada, temos 4 cubos, na terceira camada temos 5 cubos, na quarta camada temos 2 cubos e, nas 6 camadas a seguir, 1 cubo cada. O total de cubos é igual a $11+3+4+5+2+6=31$.

Solução 3: Ao longo do comprimento da caixa, no fundo, há uma fila com 10 cubos, nem todos visíveis; à esquerda, ao longo da largura da caixa, há uma fila com 7 cubos. Ao longo da altura, vemos no fundo, uma pilha com 6 cubos. Fora dessas filas, há um total de 10 cubos visíveis. Portanto, já foram colocados na caixa $10+7+6-2+10=31$ cubos – devemos subtrair 2 pois o cubo que está no canto da caixa foi contado três vezes (ao longo do comprimento, da largura e da altura).

B) O comprimento da caixa corresponde a 10 cubinhos; logo este comprimento é igual a $10\times5=50$ cm; do mesmo modo, a largura é igual a $7\times5=35$ cm e a altura é igual a $6\times5=30$ cm.

C) *Solução 1*: O número máximo de cubos que a caixa comporta, empilhados como indicado, é igual ao produto do número de cubos que podem ser colocados ao longo de cada uma das dimensões (comprimento, largura, altura) da caixa, ou seja , $10 \times 7 \times 6 = 420$ cubos. Como já foram colocados 31 cubos, faltam $420 - 31 = 389$ cubos para encher a caixa completamente.

Solução 2: A contagem pode ser feita de forma direta a partir de camadas. Por exemplo, começando do fundo, na primeira camada faltam $6 \times 10 - 18 = 42$; na segunda, faltam $60 - 4 = 56$; na terceira faltam $6 \times 10 - 2 = 58$; na quarta faltam $6 \times 10 - 3 = 57$ na quinta, faltam $6 \times 10 - 2 = 58$; na sexta e na sétima faltam na $6 \times 10 - 1 = 59$. Logo, o número de cubos que faltam é

$$42 + 56 + 57 + 2 \times 58 + 2 \times 59 = 115 + 116 + 118 = 389 .$$

QUESTÃO 4

A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?
B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Solução:

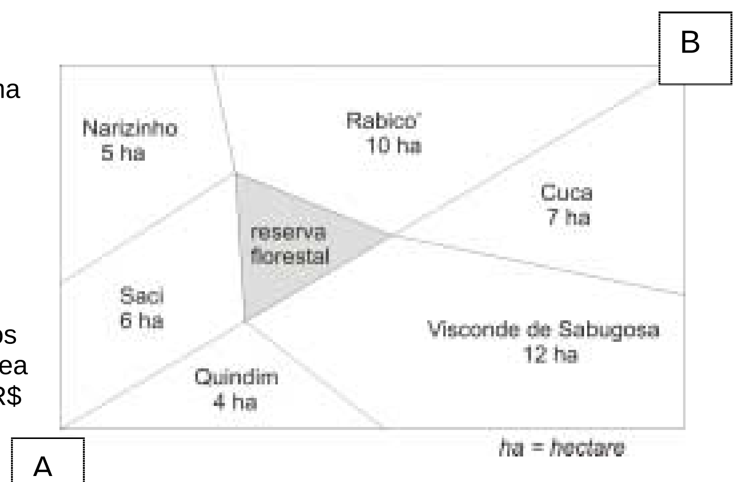
A) Tio Barnabé tem que transportar uma carga total de $150 \times 60 + 100 \times 25 = 9000 + 2500 = 11500$ quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo $5 \times 2000 = 10000$ quilos, faltando ainda $11500 - 1000 = 1500$ quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

B) *Solução 1*: Tio Barnabé pode fazer 5 viagens carregando, em cada uma, 30 sacas de arroz e 8 de milho, totalizando $30 \times 60 + 8 \times 25 = 1800 + 200 = 2000$ quilos. Em cinco viagens, ele levaria $30 \times 5 = 150$ sacas de arroz e $5 \times 8 = 40$ sacas de milho, restando $100 - 40 = 60$ sacas de milho, pesando $60 \times 25 = 1500$ quilos, que poderiam ser todas transportadas na sexta viagem.

Solução 2: Tio Barnabé pode fazer 5 viagens levando, em cada uma, 28 sacos de arroz e 12 de milho, totalizando $28 \times 60 + 12 \times 25 = 1980$ quilos em cada viagem; na sexta viagem ele pode levar os 10 sacos de arroz e os 40 de milho restantes, totalizando $10 \times 60 + 12 \times 25 = 1600$ quilos.

QUESTÃO 5

Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.



A) Qual é a área da reserva florestal?
B) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, R$ 2.420,00. Quanto foi que o Saci gastou?

Solução:

A) Um retângulo fica dividido em duas regiões de mesma área por sua diagonal. Logo os terrenos de Quindim, Visconde de Sabugosa e Cuca, juntos, têm área igual à metade da área do Sítio. Esses terrenos somam

$4+7+12=23$ hectares. A outra metade do Sítio tem a mesma área e é igual à soma das áreas dos terrenos de Saci, Narizinho, Rabicó e da reserva florestal. Portanto $6+5+10+$ (área da reserva) = 23 ha, ou seja, a área da reserva é igual a $23-21=2$ ha.

B) Quindim e Cuca, juntos, possuem $4+7=11$ ha. Assim, gastaram $\frac{2420}{11}=220$ reais por hectare. Como o terreno de Saci tem 6 ha, ele gastou $6\times 220=1320$ reais.

QUESTÃO 6

Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

A) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?
B) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

Solução:

A) O algarismo 1 não pode ser repetido porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma $1+1+x$ onde x é um algarismo; de fato, como x é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 também não pode ser repetido pois neste caso o número teria que ser 444, que tem três algarismos iguais e não está de acordo com o enunciado. Finalmente, os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois neste caso a soma dos algarismos ultrapassaria 12. Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar 9 números: 228, 282, 822, 336, 363, 633, 552, 525 e 255. Com o algarismo 6 podemos formar 2 números: 606 e 660. Portanto a quantidade de números escrita é $9+2=11$.

B) A soma de três números ímpares é um número ímpar. Como 12 é par, vemos que é impossível achar três algarismos ímpares cuja soma é 12. Logo nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.