QUESTÃO 1
ALTERNATIVA C
Como ao multiplicar qualquer número por 0 o resultado é 0, não contribuindo assim para maximizar o resultado da expressão, devemos colocar sinais de adição dos dois lados do 0:

$$2 \;\square\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\square\; 9 \;\square\; 1$$

Entre multiplicar por 1 e somar 1, o maior resultado é obtido no segundo caso, logo devemos também colocar um sinal de adição antes do 1:

$$2 \;\square\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\square\; 9 \;\boxed{+}\; 1$$

Finalmente, 2×3 é maior que $2+3$ e 8×9 é maior que $8+9$, de modo que a expressão que fornece o maior valor é

$$2 \;\boxed{\times}\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\boxed{\times}\; 9 \;\boxed{+}\; 1$$

cujo valor é $2\times 3+0+8\times 9+1=79$.

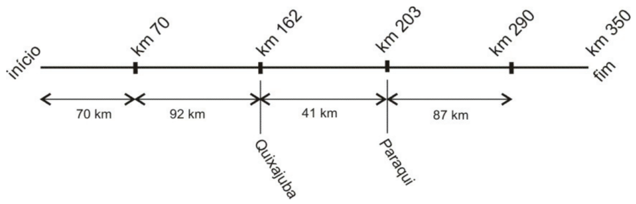
QUESTÃO 2
ALTERNATIVA A
Vamos reescrever $3-\dfrac{6}{4-\dfrac{8}{1+x}}=0$ como $3=\dfrac{6}{4-\dfrac{8}{1+x}}$; vemos então que devemos ter $4-\dfrac{8}{1+x}=2$.

Reescrevendo essa última expressão como $2=\dfrac{8}{1+x}$, segue que devemos ter $1+x=4$, ou seja, $x=3$.

Podemos também reescrever a igualdade $3-\dfrac{6}{4-\dfrac{8}{1+x}}=0$ como $3=\dfrac{6(1+x)}{4(1+x)-8}=\dfrac{6(1+x)}{4(x-1)}$.
Simplificando essa expressão obtemos $2(x-1)=x+1$, que nos dá $x=3$.

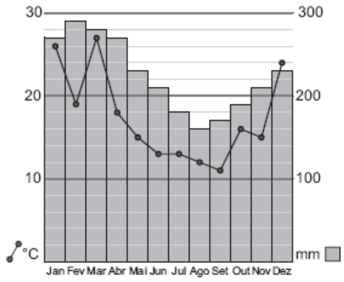
QUESTÃO 3
ALTERNATIVA C
Ao acrescentar 6 bolas à caixa **B**, ela ficará com 20 bolas. O menor percentual possível de bolas pretas corresponde ao caso em que, entre as 6 bolas que vieram da caixa **A**, há o menor número possível de bolas pretas. Como há 4 bolas brancas na caixa **A**, a retirada de 6 bolas que tem o menor número de bolas pretas é 4 brancas e 2 pretas. Nesse caso a caixa **B** ficará com 12 bolas pretas e o percentual dessas bolas será $\dfrac{12}{20}\times 100=12\times 5=60\%$.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA B
Na figura a seguir, admitimos que a estrada de 350 km começa à esquerda e termina à direita; também não faz diferença supor que Quixajuba esteja à esquerda de Paraqui.



Vamos explicar como foi feita a figura. Notamos que Quixajuba não pode estar à esquerda do quilômetro 70, pois nesse caso ela estaria antes do início da estrada. Logo ela está à direita do quilômetro 70 e fica no quilômetro $70+92=162$ da estrada. Do mesmo modo vemos que Paraqui está à esquerda do quilômetro 270 e fica no quilômetro $290-87=203$. Portanto, a distância entre as duas cidades é $203-162=41$ quilômetros.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA E



Vamos analisar cada uma das alternativas a partir da observação do gráfico.

A) O mês mais chuvoso foi fevereiro e o mês mais quente foi março. Logo (A) é falsa.
B) O mês menos chuvoso foi agosto e o mês mais foi frio setembro. Logo (B) é falsa.
C) De outubro para novembro a precipitação aumentou e a temperatura caiu. Logo (C) é falsa.
D) Os dois meses mais quentes foram janeiro e março e as maiores precipitações ocorreram em fevereiro e março. Logo (D) é falsa.
E) Os dois meses mais frios e de menor precipitação foram agosto e setembro. Logo (E) é verdadeira.

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA A

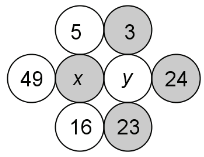
1ª solução: Como Jeca e Tatu comeram juntos 33 bananas, concluímos que Saci e Pacu comeram juntos $52-33=19$ bananas. Como Saci foi quem mais comeu e Pacu comeu pelo menos 1 banana, Saci comeu no máximo $19-1=18$ bananas. Portanto, Jeca comeu no máximo 17 bananas e, como Jeca comeu mais que Tatu, concluímos que Tatu comeu no máximo 16 bananas. Como $33=17+16$, não é possível que Jeca tenha comido menos que 17 ou Tatu menos que 16 bananas. Vemos assim que Jeca comeu 17 bananas e Tatu comeu 16 bananas; além disso, Saci comeu 18 bananas e sobrou apenas 1 banana para o Pacu.

2ª solução: Vamos denotar por s, j, t e p o número de bananas comidas por Saci, Jeca, Tatu e Pacu, respectivamente. Os dados do problema podem ser escritos como

1. $s+j+t+p=52$ (juntos eles comeram 52 bananas)
2. $s,j,t,p\geq 1$ (ninguém ficou sem comer)
3. $s>j,t,p$ (Saci comeu mais que todos os outros)
4. $j+t=33$ (Jeca e Tatu comeram, juntos, 33 bananas)
5. $j>t$ (Jeca comeu mais que Tatu)

De (1) e (4) segue que $s+p=52-(j+t)=52-33=19$. Como $p\geq 1$ temos $s\leq 18$ e de (3) segue que $j<18$. Por outro lado, de (4) e (5) segue que $2j=j+j>j+t=33$; logo $j>\dfrac{33}{2}=16{,}5$ e segue que $j\geq 17$. Temos então $17\leq j<18$; logo $j=17$ e $t=16$, ou seja, Tatu comeu 16 bananas.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA E

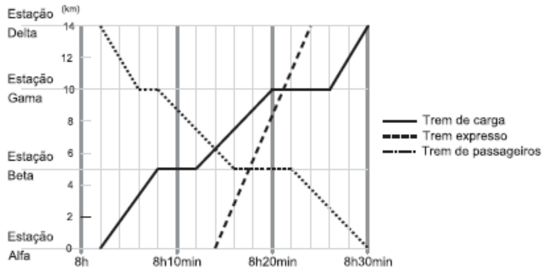


Temos $x=\dfrac{5+49+16+y}{4}=\dfrac{70+y}{4}$ e $y=\dfrac{3+24+23+x}{4}=\dfrac{50+x}{4}$. Dessas equações tiramos $4x-y=70$ e $4y-x=50$. Subtraindo essas duas últimas equações obtemos $5x-5y=20$, donde $x-y=4$.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA C

Seja h o horário do encontro. Se João sai às 8 horas, ele pedala durante $h-8$ horas e se sai às 9 horas ele pedala $h-9$ horas. Como a distância percorrida é a mesma nos dois casos e $distância=velocidade\times tempo$, temos $10(h-8)=15(h-9)$, donde tiramos $h=11$.

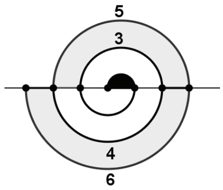
QUESTÃO 9
ALTERNATIVA D



Vamos analisar cada uma das alternativas a partir da observação do gráfico.

A) Para fazer o percurso entre a Estação Beta e a estação Alfa o trem de passageiros leva 8 minutos, portanto (A) é falsa.
B) O trem expresso não para entre as estações Alfa e Delta, logo (B) é falsa.
C) O trem de carga faz o percurso entre as estações Alfa e Beta em 6 minutos, enquanto que o trem expresso o faz em 4 minutos; logo (C) é falsa.
D) O trem expresso ultrapassa o trem de carga quando este último está parado na estação Gama, e portanto (D) é a verdadeira.
E) O trem de passageiros permanece parado na estação Beta por 6 minutos, logo (E) é falsa.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA E



Na figura escrevemos, ao longo das semicircunferências, quantas vezes seu diâmetro é maior que o diâmetro da semicircunferência de área 1. Como a proporção entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade, segue que as áreas das semicircunferências rotuladas com 3, 5, 4 e 6 são, respectivamente, 9, 25, 16 e 36. Logo a região cinza tem área $(25-9)+(36-16)=16+20=36$.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA D

Temos duas possibilidades para Adriano: ele é um tamanduá ou uma preguiça. Vamos primeiro supor que ele é um tamanduá e fazer a tabela a seguir, linha por linha, de acordo com as falas dos amigos:

		é	diz que	logo
1	**Adriano**	um tamanduá (diz a verdade)	Bruno é uma preguiça	Bruno é uma preguiça
2	**Bruno**	uma preguiça (mente)	Carlos é um tamanduá	Carlos é uma preguiça
3	**Carlos**	uma preguiça (mente)	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal	Daniel e Adriano são o mesmo tipo de animal
4	**Daniel**	um tamanduá (diz a verdade)	Adriano é uma preguiça	Adriano é uma preguiça

As casas sombreadas mostram que nesse caso Adriano, além de ser um tamanduá, é também uma preguiça, o que não pode acontecer pelas regras da brincadeira. Logo Adriano não é um tamanduá, ou seja, ele é uma preguiça. Fazemos agora outra tabela do mesmo modo que a anterior:

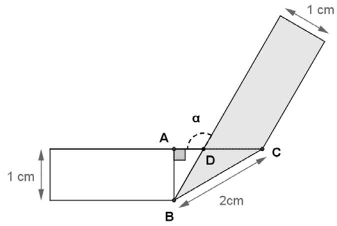
		é	diz que	logo
1	**Adriano**	uma preguiça (mente)	Bruno é uma preguiça	Bruno é um tamanduá
2	**Bruno**	um tamanduá (diz a verdade)	Carlos é um tamanduá	Carlos é um tamanduá
3	**Carlos**	um tamanduá (diz a verdade)	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal
4	**Daniel**	um tamanduá (diz a verdade)	Adriano é uma preguiça	Adriano é uma preguiça

e vemos que Bruno, Carlos e Daniel são tamanduás.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA E

Seja n o menor número de meias que a Joana pode retirar da gaveta com a certeza de que entre as meias retiradas haja um par sem defeito. Então $n-1$ é o maior número de meias que podem ser retiradas de tal forma que, entre elas, qualquer par seja defeituoso. O pior dos casos ocorre quando se retiram os dois pares defeituosos (o par de meias furadas e o par com uma das meias furada) e uma meia de cada um dos outros oito pares, num total de 12 meias. Portanto $n-1=12$ e então $n=13$.

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA C



Consideremos o triângulo ABC na figura ao lado. Ele é retângulo com $AB = 1$ cm e $BC = 2$ cm, ou seja, um cateto é metade da hipotenusa. Segue que $D\hat{C}B = A\hat{C}B = 30^o$ e, analogamente, $C\hat{B}D = 30^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que $B\hat{D}C = 180 - 30 - 30 = 120^o$. Como $B\hat{D}C$ e α são opostos pelo vértice, concluímos que $\alpha = 120^o$.

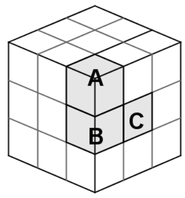
QUESTÃO 14
ALTERNATIVA B

A tabela mostra a paridade dos possíveis resultados da soma dos números dos cartões; a primeira linha indica os números dos cartões brancos e a primeira coluna os números dos cartões pretos.

	1	2	3
1	par	ímpar	Par
2	ímpar	par	Ímpar
3	par	ímpar	Par

Temos então 5 possibilidades de soma par entre 9 possíveis, ou seja, a probabilidade de a soma ser par é $\frac{5}{9}$.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA B



Vamos observar o cubo maior, conforme a figura ao lado. Nele aparecem

- 8 cubos do tipo **A**, que exibem três faces com um vértice comum;
- 12 cubos do tipo **B**, que exibem duas faces com uma aresta comum;
- 6 cubos do tipo **C**, que exibem apenas uma face.

Figura 1

Nosso interesse é colocar os maiores números possíveis nas faces do cubo maior. Para isso, basta colocar os dados do tipo **A** mostrando 4, 5 e 6, os dados do tipo **B** mostrando 5 e 6 e os dados do tipo **C** mostrando o 6. É possível fazer isso pois a figura 1 nos mostra que 4, 5 e 6 têm um vértice em comum. Nesse caso a soma dos números que aparecem é máxima e seu valor é

$$\underbrace{8 \times (4+5+6)}_{\text{8 dados A}} + \underbrace{12 \times (5+6)}_{\text{12 dados B}} + \underbrace{6 \times 6}_{\text{6 dados C}} = 288$$

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA A
Nas figuras A, B e C traçamos segmentos que unem os centros dos círculos, como na figura a seguir. Marcamos também o valor de alguns ângulos centrais.

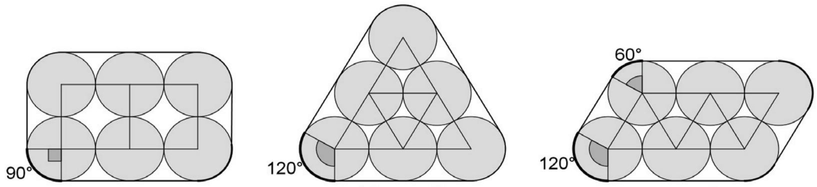


Figura A Figura B Figura C

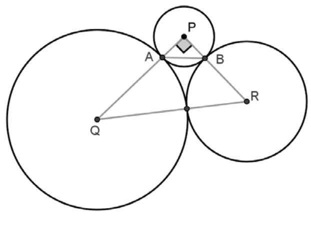
Para simplificar a exposição, vamos chamar o raio comum das circunferências de *r* e o comprimento comum das circunferências de *l*. O perímetro da figura A é igual ao perímetro do retângulo interno mais quatro vezes o comprimento do arco do círculo correspondente a 90º, ou seja, $a = 12r + 4\times\frac{1}{4}l = 12r + l$. O perímetro da figura B é igual ao perímetro do triângulo equilátero interior mais três vezes o comprimento do arco do círculo correspondente a 120º, ou seja, $b = 12r + 3\times\frac{1}{3}l = 12r + l$. Finalmente, o perímetro da figura C é igual ao perímetro do paralelogramo interno mais duas vezes o comprimento do arco do círculo correspondente a 120º e duas vezes o comprimento do arco do círculo correspondente a 60º, ou seja, $c = 12r + 2\times\frac{1}{3}l + 2\times\frac{1}{6}l = 12r + l$. Logo $a = b = c$.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA C
Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso (a), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Isso pode ser feito de $4\times3\times2\times1 = 24$ maneiras diferentes.

No caso (b), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4\times3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Isso pode ser feito de $3\times12\times1 = 36$ maneiras diferentes.

No total, Tio João pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA B



Lembramos primeiro que se duas circunferências são tangentes então a reta que passa por seus centros passa também pelo ponto de tangência. No nosso caso, chamando de *P*, *Q* e *R* os centros das circunferências (como na figura), isso mostra que $PR = 3$, $PQ = 4$ e $QR = 5$. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, segue que o triângulo *PQR* é retângulo em *P*. E como temos $PA = PB = 1$, vemos que *AB* é a diagonal de um quadrado de lado 1, ou seja, $AB = \sqrt{2}$.

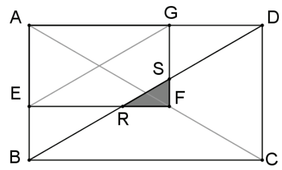
QUESTÃO 19
ALTERNATIVA D

Sejam m e n as medidas dos lados do retângulo e l o lado do quadrado (em centímetros); supomos que $l = m - 5$. Da igualdade das áreas segue a expressão $(m-5)^2 = mn$, donde tiramos

$$n = \frac{(m-5)^2}{m} = \frac{m^2 - 10m + 25}{m} = m - 10 + \frac{25}{m}.$$

Como m e n são números inteiros, é necessário que $\frac{25}{m}$ também seja inteiro; isso só acontece quando m é um divisor de 25, ou seja, quando m é igual a 1, 5 ou 25. Os casos $m = 1$ e $m = 5$ não podem acontecer pois $l = m - 5$ é positivo. Logo $m = 25$, donde $l = 20$ e a área do quadrado é $l^2 = 20^2 = 400$. Como essa é também a área do retângulo temos $mn = 25n = 400$ e segue que $n = 16$. Logo o perímetro do retângulo é $2m + 2n = 2 \times 25 + 2 \times 16 = 82$ cm.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA A



Como a área do triângulo RFS é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo $AEFG$, ela é igual a $\frac{1}{9}$ da área do triângulo EFG. Como esses triângulos são semelhantes e a razão entre suas áreas é o quadrado de sua razão de semelhança, segue que essa última razão é $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Logo $FR = \frac{1}{3}EF$ e então $ER = EF - \frac{1}{3}EF = \frac{2}{3}EF$. Como os triângulos FRS e EBR são semelhantes, isso nos mostra que sua razão de semelhança é

$$\frac{FR}{RE} = \frac{\frac{1}{3}EF}{\frac{2}{3}EF} = \frac{1}{2}.$$

Temos então $AE = GF = 3FS$ e $EB = 2FS$, donde $AB = AE + EB = 3FS + 2FS = 5FS$ e $\frac{AE}{AB} = \frac{3FS}{5FS} = \frac{3}{5}$. Pelo teorema de Tales temos $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ e obtemos $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{5}$.