QUESTÃO 1
ALTERNATIVA B
A quantidade de água que Daniela gastava por semana (isto é, em 7 dias) em cada atividade era:

- *lavar roupa*: $7\times 150=1050$ litros;
- *banho de 15 minutos*: $7\times 90=630$ litros;
- *lavar o carro com mangueira*: $1\times 100=100$ litros.

Assim, ela gastava $1050+630+100=1780$ litros por semana. Com a economia, Daniela passou a gastar semanalmente em cada atividade:

- *lavar roupa no tanque*: $3\times 150=450$ litros;
- *banho de 5 minutos*: $7\times\dfrac{90}{3}=7\times 30=210$ litros;
- *lavar o carro com balde*: $1\times 10=10$ litros,

ou seja, um total de $450+210+10=670$ litros. Portanto, ela passou a economizar por semana $1780-670=1110$ litros de água.

Podemos também pensar diretamente na economia semanal da Daniela:

- 4 *lavagens de roupa*: $4\times 150=600$ litros;
- $\dfrac{2}{3}$ *banho por dia*: $7\times\dfrac{2}{3}\times 90=420$ litros;
- *substituir a mangueira pelo balde:* $100-10=90$,

o que nos dá o total de $600+420+90=1110$ litros.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
Seja x o comprimento do pé do Maurício. Então $39<\dfrac{5x+28}{4}\le 40$, e segue que $156<5x+28\le 160$. Logo $128<5x\le 132$, ou seja, $25{,}6<x\le 26{,}4$. A única alternativa que satisfaz estas desigualdades é a alternativa C.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA A
Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para a e b em $a*b=(a+1)\times(b-1)=24$ e testá-las em $b*a=(b+1)\times(a-1)=30$ para achar os possíveis valores de a e b. Vamos lá:

$24=$	a	b	$(b+1)\times(a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a>0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	**30**
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

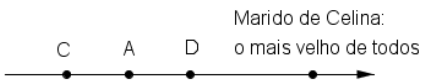
Logo $a=7$ e $b=4$, donde $a+b=11$.

De modo mais algébrico, podemos resolver este problema como segue. Temos $a*b=(a+1)(b-1)=ab-a+b-1=24$ e $b*a=(b+1)(a-1)=ab+a-b-1=30$. Somando estas duas expressões, obtemos $2ab-2=54$ e segue que $ab=28$. De modo análogo ao anterior, geramos as possibilidades (1,28), (2,14), (4,7), (7,4), (14,2) e (28,1) para (a,b) e verificamos que apenas $a=7$ e $b=4$ satisfazem $a*b=24$ e $b*a=30$.

Alternativamente, notamos que subtraindo $ab-a+b-1=24$ de $ab+a-b-1=30$ obtemos $2a-2b=6$, ou seja, $a-b=3$. Logo $a=b+3$ e, substituindo em $ab=28$ temos $b^2-3b-28=0$. Esta equação tem raízes $b=4$ e $b=-7$; como só nos interessa a raiz positiva, temos $b=4$ e então $a=7$.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA C

Na figura ao lado**,** A representa a idade de Arnaldo, C a de Celina e D a de Dalila; a flecha indica o sentido de idade crescente. A ordem das letras C, A e D indica que Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. Logo o esposo de Celina é Beto, que é também o mais velho de todos.

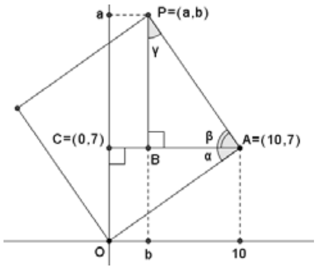


QUESTÃO 5
ALTERNATIVA D

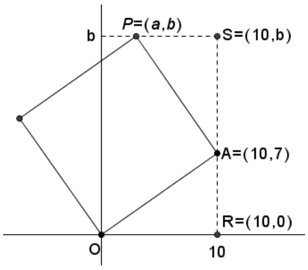
A área de uma circunferência é proporcional ao quadrado do diâmetro. Como uma pizza grande tem diâmetro duas vezes maior que o de uma pequena, se a área de uma pizza pequena é A então a área de uma grande é $4A$. Três fatias de uma pizza grande têm área $\frac{3}{16}\times 4A = \frac{3}{4}A$, ou seja, correspondem a $\frac{3}{4}$ de uma pizza pequena.

Pode-se também resolver esta questão usando a fórmula da área de uma circunferência. Seja r o raio da pizza pequena; então sua área é πr^2. O raio da pizza grande é $2r$ e sua área é $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$. Três fatias da pizza grande têm área $\frac{3}{16}\left(4\pi r^2\right) = \frac{3}{4}\pi r^2$, ou seja, $\frac{3}{4}$ da área de uma pizza pequena.

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA A



Sejam O a origem, A o ponto $(10,7)$ e P o ponto (a,b). Traçando por A uma paralela ao eixo x e por P uma paralela ao eixo y, determinamos os pontos B e C como na figura. Como $A=(10,7)$, temos $AC=10$ e $OC=3$; além disso, $OA=AP$. Denotamos por α, β e γ as medidas dos ângulos destacados. Observamos agora que, como o ângulo $O\hat{A}P$ é reto, temos $\alpha+\beta=90^\circ$. Por outro lado, como o triângulo ABP é retângulo em B, temos $\beta+\gamma=90^\circ$. Segue que $\alpha=\gamma$ e então os triângulos OAC e ABP são congruentes, pois são triângulos retângulos com um ângulo (além do ângulo reto) comum e hipotenusas OA e AP iguais. Concluímos que $AB=7$ e $BP=10$, donde $a=7+10=17$ e $b=10-7=3$; logo $a+b=3+17=20$.



Outra solução usa a figura à esquerda. Os triângulos ORA e ASP são congruentes, por argumentos semelhantes aos da primeira solução; segue que $AS=OR=10$ e $PS=AR=7$. Logo $a=3$ e $b=17$, donde $a+b=20$.

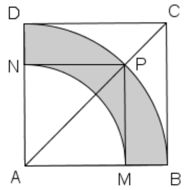
QUESTÃO 7
ALTERNATIVA C

Notamos que $5353 = 53\times 101$ e $2828 = 28\times 101$. Podemos então fazer a conta rapidamente, usando a identidade $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$5353^2-2828^2 = 53^2\times 101^2+28^2\times 101^2 = \left(53^2-28^2\right)\times 101^2 = (53-28)\times(53+28)\times 101^2$$

$$= 5^2\times 9^2\times 101^2 = 45^2\times 101^2 = \left(45\times 101\right)^2 = 4545^2.$$

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA E



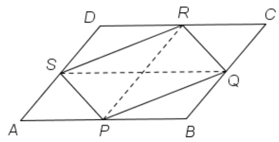
Seja ℓ o lado do quadrado *ABCD*. Como $\overset{\frown}{BD}$ é um arco de circunferência com centro *A*, segue que *AP* é um raio da circunferência, e portanto $AP = AB = \ell$. Por outro lado, AP é a diagonal do quadrado *AMPN*; o teorema de Pitágoras nos diz então que $\ell^2 = AM^2 + MP^2$. Como $AM = MP$, segue que $\ell^2 = 2AM^2$, donde $AM^2 = \dfrac{\ell^2}{2}$. A área sombreada é então

$$\frac{1}{4}\pi AB^2 - \frac{1}{4}\pi AM^2 = \frac{1}{4}\left(\pi\ell^2 - \pi\frac{\ell^2}{2}\right) = \frac{1}{8}\pi\ell^2$$

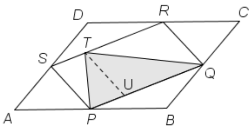
e a razão entre esta área e a área do quadrado é

$$\frac{\frac{1}{8}\pi\ell^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{8}.$$

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA A

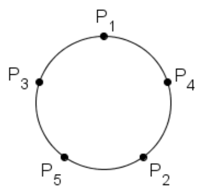


Por um momento, esquecemos o triângulo *PQT* e traçamos os segmentos *PR* e *QS*, como na figura ao lado. É imediato que todos os triângulos que aparecem são congruentes; segue que *PQRS* é um paralelogramo e sua área é metade da área de *ABCD*, ou seja, 20 cm^2.



Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela *TU* ao segmento *PS*. Os triângulos *PST* e *UTP* são congruentes, bem como os triângulos *UTQ* e *RQT*. Como o triângulo *PQT* é a união dos triângulos *UTP* e *UTQ*, segue que sua área é metade da área do quadrilátero *PQRS*, ou seja, 10 cm^2.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA D

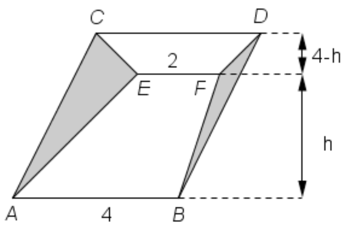


Vamos denotar o comprimento da circunferência por ℓ, e chamar a formiguinha mais rápida de formiguinha A e a outra de formiguinha B; suas velocidades serão denotadas por v_A e v_B, respectivamente. Como A dá 9 voltas enquanto B dá 6, temos $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$; isto mostra que se A anda uma distância d_A enquanto B anda uma distância d_B, então $\dfrac{d_A}{d_B} = \dfrac{3}{2}$.

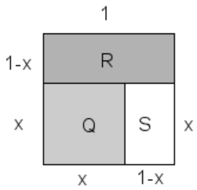
Como as formiguinhas andam em sentidos contrários, elas vão se encontrar uma primeira vez em um ponto que chamaremos P_1. Sejam d_A e d_B as distâncias percorridas pelas formiguinhas até que elas se encontrem novamente. Então $d_A + d_B = \ell$ e $\dfrac{d_A}{d_B} = \dfrac{3}{2}$. A segunda expressão nos dá $d_A = \dfrac{3}{2}d_B$; substituindo na primeira temos $d_B + \dfrac{3}{2}d_B = \dfrac{5}{2}d_B = \ell$, donde $d_B = \dfrac{2}{5}\ell$.

Isto quer dizer que B vai encontrar A, a partir do ponto P_1, cada vez que percorrer uma distância de $\dfrac{2}{5}\ell$. Podemos agora desenhar os pontos em que elas se encontram; além de P_1, eles são (em ordem) P_2, P_3, P_4 e P_5, como na figura (estes pontos são vértices de um pentágono regular inscrito na circunferência). Notamos que após o encontro em P_5 as formiguinhas se encontram novamente em P_1, ou seja, não há mais outros pontos de encontro.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA B



Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo *ABCD* e subtrair as áreas dos trapézios *ABFE* e *CDFE*. Seja *h* a altura do trapézio *ABFE*; sua área é então $\frac{AB+EF}{2}h = 3h$ cm². Como a altura do paralelogramo *ABCD* é 4 cm, a altura do trapézio *CDFE* é $4-h$ e sua área é $\frac{CD+EF}{2}(4-h) = 12-3h$ cm². A área do paralelogramo *ABCD* é 16 cm²; a soma das áreas dos triângulos é então $16-(3h+12-3h) = 4$ cm².

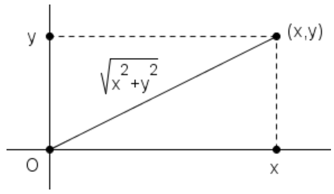


QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A

Seja *x* o lado do quadrado. A área de *R* é então $1\times(1-x) = 1-x$, a área de *Q* é x^2 e a área de S é $x(1-x) = x - x^2$. Como as áreas de *R* e *Q* são iguais, temos $x^2 = 1-x$. A raiz positiva desta equação é $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e logo a área de *S* é

$$x - x^2 = x-(1-x) = 2x-1 = 2\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = \sqrt{5}-2 \text{ m}^2.$$

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA C



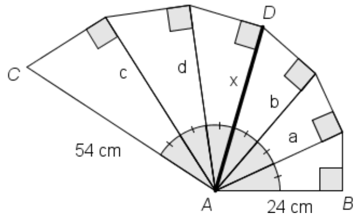
Coloquemos a origem de coordenadas no ponto *O*. O teorema de Pitágoras mostra que a distância de um ponto (x,y) à origem de coordenadas é $\sqrt{x^2+y^2}$; logo, para que (x,y) esteja na região delimitada pelas circunferências de raios 4 e 5, devemos ter $16 = 4^2 \le x^2+y^2 \le 5^2 = 25$. Observamos também que se (x,y) está nesta região, o mesmo se pode dizer todos os pontos da forma $(\pm x, \pm y)$ e $(\pm y, \pm x)$. Assim, podemos restringir nossa análise a pontos (x,y) com $x, y \ge 0$ e $x \le y$.

Como $16 \le x^2+y^2 \le 25$, devemos ter $0 \le x, y \le 5$, e estamos interessados apenas em valores inteiros de *x* e *y*. Procedemos agora por listagem direta, e obtemos a tabela a seguir.

pontos (x,y) **com** $x,y\ge 0$, $x \le y$ **e** $16 \le x^2+y^2 \le 25$	**pontos da forma** $(\pm x, \pm y)$ **e** $(\pm y, \pm x)$	**número de pontos**
(0,4)	$(0,\pm 4)$, $(\pm 4, 0)$	4
(0,5)	$(0,\pm 5)$, $(\pm 5, 0)$	4
(1,4)	$(\pm 1,\pm 4)$, $(\pm 4,\pm 1)$	8
(2,4)	$(\pm 2 \pm 4)$, $(\pm 4,\pm 2)$	8
(3,3)	$(\pm 3,\pm 3)$	4
(3,4)	$(\pm 3,\pm 4)$, $(\pm 4,\pm 3)$	8
	Total	**36**

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C

Vamos denotar as hipotenusas dos triângulos retângulos que aparecem na figura por *a*, *b*, *x*, *d* e *c*, como na figura; nosso objetivo é achar $x = AD$.



Os seis triângulos retângulos são semelhantes, pois têm em comum o ângulo de vértice *A*. Logo

$$\frac{24}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{x}=\frac{x}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{54}$$

Multiplicando os três primeiros termos acima e, separadamente, os três últimos, obtemos $\frac{24}{x}=\frac{x}{54}$. Logo $x^2 = 24\times 54 = 2^3\times 3\times 2\times 3^3 = 2^4\times 3^4 = 4^2\times 9^2 = 36^2$, donde $x = 36$ cm.

Alternativamente, seja $\lambda = \frac{24}{a}$. Multiplicando os seis termos da sequência de igualdades acima, obtemos $\lambda^6 = \frac{24}{54}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, donde $\lambda^3 = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $\lambda^3 = \frac{24}{a}\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{x}=\frac{24}{x}$ e obtemos $\frac{24}{x}=\frac{2}{3}$, donde $x = 36$ cm.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA D

Vamos denotar por P e V canetas pretas e vermelhas, respectivamente. Como o número de P e V que Juliana tem são iguais, as probabilidades de ela escolher uma P ou uma V ao acaso são ambas iguais a $\frac{1}{2}$. Podemos então fazer a seguinte tabela:

caneta colocada na bolsa ao acaso	probabilidade	canetas na bolsa no dia seguinte	probabilidade de tirar uma P
P	$\frac{1}{2}$	P, P	1
V	$\frac{1}{2}$	V, P	$\frac{1}{2}$

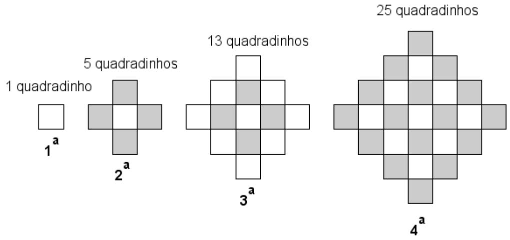
Como os eventos (P,P) e (P,V) são disjuntos, a probabilidade de Juliana tirar uma caneta preta da bolsa é

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA D

Vamos contar quantos quadradinhos brancos e sombreados aparecem em cada figura.

figura	brancos	sombreados	total
1ª	$1=1^2$	$0=0^2$	1^2+0^2
2ª	$1=1^2$	$4=2^2$	2^2+1^2
3ª	$9=3^2$	$4=2^2$	3^2+2^2
4ª	$9=3^2$	$16=4^2$	4^2+3^2



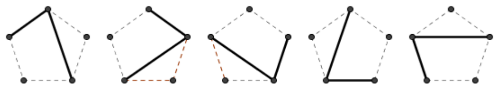
Em geral, vemos que a *n*-ésima figura terá $n^2+(n-1)^2$ quadradinhos. Nosso problema se resume então a achar o menor inteiro positivo *n* tal que $n^2+(n-1)^2 \geq 2009$. Podemos fazer isto analisando o sinal do polinômio $n^2+(n-1)^2-2009 = 2n^2-2n-2008$, mas é mais rápido proceder por aproximações, como segue.

Como $n^2 > (n-1)^2$ para $n \geq 1$, devemos ter $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 > 1005$; segue que $n > 31$. Como $32^2+31^2 = 1985$, o valor $n = 32$ está descartado; por outro lado, para $n = 33$ temos $33^2+32^2 = 2113$.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA E
O pentágono tem 5 lados e 5 diagonais, num total de 10 segmentos. Uma figura consiste de 2 destes segmentos, e escolhas distintas de dois segmentos correspondem a figuras distintas. Segue que o número de figuras distintas é $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$.

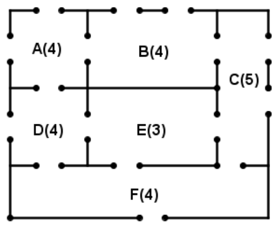
Outra maneira de resolver esta questão é listar, organizadamente, as figuras possíveis. Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.

Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.

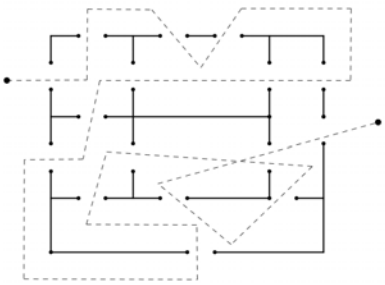


Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA B
Na figura marcamos, ao lado das letras que identificam as salas, o número de portas de cada uma.

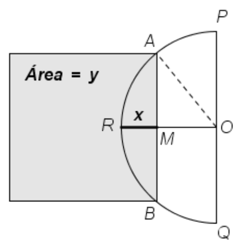


Vamos supor que a porta pela qual o Joãozinho passou duas vezes pertence a uma sala com 4 portas. Então ele passou uma única vez pelas 3 portas restantes, ou seja, ele passou 5 vezes pelas portas desta sala. Logo ele *entrou, saiu, entrou, saiu* e *entrou* na sala, ou seja, ficou dentro dela. Esta conclusão é contrária ao enunciado, que diz que ele foi embora. Logo o Joãozinho passou uma única vez por todas as portas das salas com 4 portas. Assim, a porta pela qual ele passou duas vezes é aquela que não pertence a nenhuma sala com 4 portas, ou seja, é a porta que liga as salas C e E.



Coloca-se, é claro, a questão da existência de um trajeto que satisfaça as condições do enunciado. Para isto, providenciamos a figura ao lado; nela, as bolinhas marcam o início e o término do trajeto.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA C



Como o diâmetro do círculo é 2, seu raio é 1. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo *OMA*, obtemos $AM^2 = 1^2 - (1-x)^2 = 2x - x^2$. Esta é a área de um quadrado de lado $AM = \frac{AB}{2}$: a área do quadrado de lado *AB* é então $y = 4(2x - x^2) = 8x - 4x^2$. Notamos que como x varia em *OR*, temos $0 \le x \le 1$; para $x = 0$ temos $y = 0$ e para $x = 1$ temos $y = 4$. O gráfico de $y = 8x - 4x^2$ é uma parábola com concavidade para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo; este gráfico está representado na alternativa C).

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA E
Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.