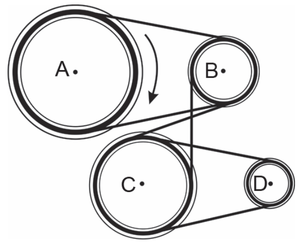
QUESTÃO 1
(ALTERNATIVA E)
Carlos começou a trabalhar com 41-15=26 anos. Se *y* representa o número total de anos que ele trabalhará até se aposentar, então sua idade ao se aposentar será 26+*y*, e portanto 26+*y*+*y*=100. Segue que $y = \frac{100-26}{2} = 37$. Logo ele poderá se aposentar com 26+37=63 anos.

Outra solução: Atualmente a idade do Carlos mais os anos que ele já trabalhou somam $41+15=56$. Cada ano a mais que o Carlos trabalhar acrescentará 2 a este total. Como $100-56=44$, ele deve trabalhar mais $\frac{44}{2}=22$ anos para atingir a soma 100. Ao final deste período ele terá então $41+22=63$ anos de idade.
Equivalentemente, se Carlos trabalhar mais *x* anos, a soma de sua idade ao se aposentar com os anos trabalhados será de $(41+x)+(15+x)=56+2x$. Para que essa soma seja 100, devemos ter $56+2x=100$, donde $2x=44$ e então $x=22$, como antes.

QUESTÃO 2
(ALTERNATIVA D)



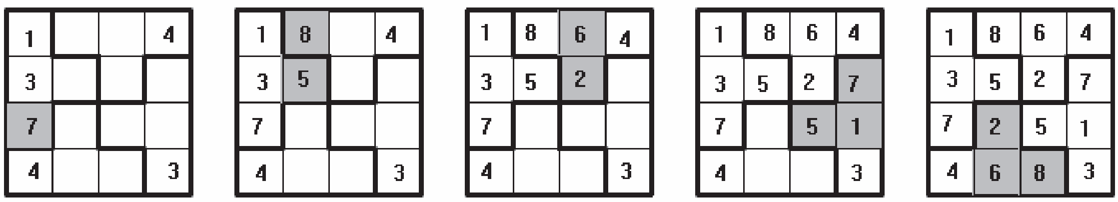
A figura mostra que os discos A e B giram no mesmo sentido, os discos B e C em sentidos opostos e os discos C e D no mesmo sentido. Assim, D gira no sentido anti-horário. Lembramos que o perímetro *p* de um círculo de raio *r* é dado por $p = 2\pi r$.
Como o raio do disco A é quatro vezes o de D, segue que o perímetro de A também é quatro vezes o perímetro de D. Logo D dá quatro voltas para cada volta de A.
Usamos no argumento acima o fato intuitivo de que os raios dos discos B e C são irrelevantes para a resolução desta questão; é interessante mostrar isto rigorosamente. No caso geral, podemos supor que os raios de A, B, C e D são *a*, *b*, *c* e *d*, respectivamente.
Se n_a, n_b, n_c e n_d são os números de voltas dados pelos discos A,B,C e D, respectivamente, então

$$n_a \cdot 2\pi a = n_b \cdot 2\pi b$$

$$n_b \cdot 2\pi b = n_c \cdot 2\pi c \Rightarrow n_a \cdot 2\pi a = n_d \cdot 2\pi d \Leftrightarrow \frac{n_d}{n_a} = \frac{a}{d}$$. Se $n_a = 1$ então $n_d = \frac{8}{2} = 4$

$$n_c \cdot 2\pi c = n_d \cdot 2\pi d$$

QUESTÃO 3
(ALTERNATIVA E)
Uma maneira de preencher a tabela de acordo com as condições do enunciado é dada abaixo. Em cada etapa, indicamos com cinza as novas casas preenchidas; o leitor pode justificar cada um dos passos ilustrados. Notamos que a tabela final é única, independente do modo com que ela é preenchida.



Voltando à questão, vemos que a soma dos números nos quadradinhos cinzas marcados no desenho do enunciado é $6+8+5+1=20$.

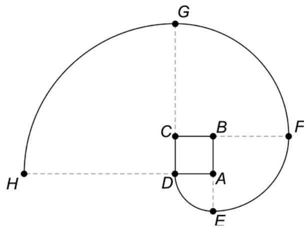
QUESTÃO 4
(ALTERNATIVA D)
De acordo com a lei de formação dada, a seqüência de retângulos, escrita como altura x base, é da forma

$$1\times 2,\ 2\times 3,\ 3\times 5,\ 4\times 7,\ \ldots,\ n\times(2n-1),\ldots$$

Logo o 100º retângulo (*n*=100) é da forma 100×199, e seu perímetro é $2\times(100+199)=598$.

QUESTÃO 5
(ALTERNATIVA A)
O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$; um arco de um quarto dessa circunferência tem então comprimento $\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$. Os raios das circunferências cujos arcos estão sendo considerados no problema são 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm. A soma dos comprimentos desses arcos é então

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(1+2+3+4)\pi}{2} = 5\pi$$



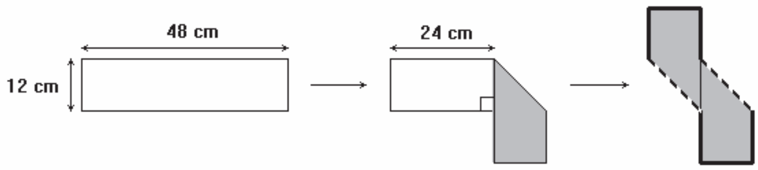
QUESTÃO 6
(ALTERNATIVA E)
Pensando que o terreno fosse quadrado, Ronaldo calculou seu lado como $\sqrt{900} = 30$ metros, e comprou $4 \times 30 = 120$ metros de cerca. Mas ele precisaria de $120 + 2 = 122$ metros de cerca, que é o perímetro do terreno. Se a é o comprimento e b a largura do terreno (supomos $a > b$), temos as equações $2(a+b) = 122$, que expressa o perímetro, e $ab = 900$, que expressa a área. Logo $a + b = 61$ e $ab = 900$, logo a e b são então raízes de $x^2 - 61x + 900 = 0$ As raízes dessa equação são $a = 36$ e $b = 25$, donde $a - b = 11$.
Uma outra maneira de determinar $a - b$ é através da identidade $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, onde

$$(a-b)^2 = 61^2 - 4 \times 900 = 3721 - 3600 = 121$$

ou seja $a - b = \sqrt{121} = 11$.

QUESTÃO 7
(ALTERNATIVA C)
Como a cada sábado segue um domingo, para que o número de sábados num ano seja maior que o número de domingos é necessário que o último dia desse ano seja sábado. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, um ano bissexto consiste de 52 semanas e 2 dias. Logo, se 31 de dezembro foi um sábado, 2 de janeiro também foi um sábado. Contando de 7 em 7, vemos que 16 de janeiro foi um sábado, donde 20 de janeiro foi uma quarta-feira.

QUESTÃO 8
(ALTERNATIVA E)
Na tira dobrada, à direita na figura, marcamos em traço grosso seis lados do polígono e em traço pontilhado os dois restantes.



Todos os 6 segmentos em traço grosso têm comprimento 12 cm e os 2 pontilhados são diagonais de um quadrado de lado 12 cm, ou seja, medem $\sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm. Logo o perímetro do polígono é $6 \cdot 12 + 2 \cdot 12\sqrt{2} = 72 + 24\sqrt{2}$ cm.

QUESTÃO 9
(ALTERNATIVA B)
Até Lúcia completar a primeira volta, m vale 0. No momento em que ela completar essa volta, m passa a valer 1, e só muda de valor no momento em que ela completar a segunda volta, quando passa a valer 2, e assim por diante. Portanto, o gráfico da função é formado por segmentos horizontais, que correspondem aos números naturais do eixo m. Como a cada volta ela percorre a mesma distância, os segmentos horizontais têm todos o mesmo comprimento. O gráfico correto é o da alternativa B.
Mais formalmente, suponhamos que o comprimento da pista seja c metros e que Lúcia acabou de completar k voltas, ou seja, que $m = k$ neste momento. Então ela acabou de correr correu kc metros, e até ela dar mais uma volta, ou seja, correr $kc + c = (k+1)c$ metros, o valor de m não muda. Podemos então descrever a função m pela expressão $m(x) = k$ se $kc \le x < (k+1)c$, cujo gráfico é como na alternativa (B).

QUESTÃO 10
(ALTERNATIVA D)
Sejam *x* e *y* os números que Pedrinho colocou, respectivamente, nos cantos superior esquerdo e superior direito da tabela. Então $\frac{x+y}{2}=7$, donde $y=14-x$. Do mesmo modo segue que o número que ele colocou no canto inferior esquerdo foi $18-x$.

x	7	$14-x$
9	$\frac{x+20}{2}=16-x$	
$18-x$		20

Finalmente, o número que ele colocou no centro da tabela pode ser escrito de duas maneiras:

- a média de *x* e 20, que é $\frac{x+20}{2}$, e
- a média de $14-x$ e $18-x$, que é $\frac{(14-x)+(18-x)}{2}=16-x$.

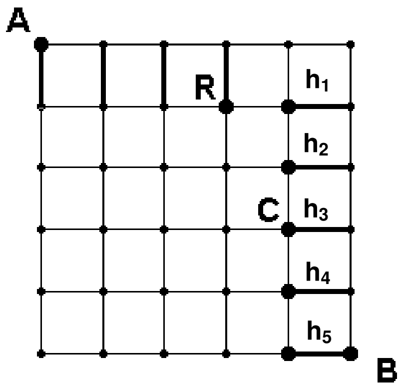
Obtemos então a equação $\frac{x+20}{2}=16-x$, cuja solução é $x=4$. Com isso, podemos completar a tabela e obtemos

4	7	10
9	12	15
14	17	20

de modo que a soma procurada é $4+15=19$.

QUESTÃO 11
(ALTERNATIVA B)
Como $535=11\times 46+29$, vemos que 11 ônibus são insuficientes para o passeio. Por outro lado, de $13\times 46=598$ vemos que se o número de ônibus fosse maior ou igual a 13 o número de professores seria no mínimo $598-535=63$, o que não é possível pois em cada ônibus há no máximo 2 professores. Logo o passeio foi feito com 12 ônibus e o número de professores é $12\times 46-535=17$. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e 17 dividido por 12 tem quociente 1 e resto 5, concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5.
Outra solução: Sejam *x* o número de ônibus com 1 professor (nesses ônibus há 45 alunos) e *y* o número de ônibus com 2 professores (nesses ônibus há 44 alunos). Logo, $45x+44y=535$. Para resolver essa equação, observe que como *x* e y são inteiros positivos, *y* tem que ser um múltiplo de 5 menor que 15 (porque $15\times 44>535$), isto é, *y* vale 5 ou 10. Substituindo esses valores na equação, obtemos $y=5$.

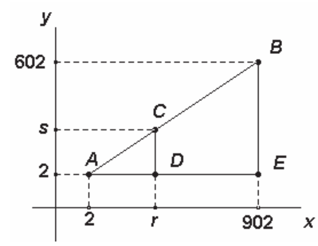
QUESTÃO 12
(ALTERNATIVA E)



Para ir de A até R a formiguinha deve escolher um dos quatro segmentos verticais em traço mais grosso na primeira linha da figura. Uma vez escolhido esse segmento, há um único caminho de A até R que passa por ele. Desse modo, a formiguinha pode ir de A até R de quatro maneiras diferentes. Para ir de R a B, ela deve escolher um dos segmentos horizontais h_1, h_2, h_3, h_4 e h_5 na última coluna para chegar ao lado direito da figura, após o que só há uma maneira de chegar até B. Se ela escolher, por exemplo, o segmento h_3, ela deve ir de R até C, o que pode ser feito de três maneiras diferentes. Repetindo esse raciocínio para os outros pontos concluímos que ela pode ir de R até B de $1+2+3+4+5=15$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de ir de A até R é $4\times 15=60$.
Podemos também usar as letras *b* e *d* para dizer que a formiguinha percorre um segmento para baixo ou para direita, respectivamente. Um caminho de A até R é então uma seqüência de um *b* e três *d*'s; a formiguinha deve então escolher em qual das quatro posições colocar o *b*, donde há 4 desses caminhos. Analogamente, uma caminho de R até B consiste de uma seqüência de quatro *b*'s e dois *d*'s; a formiguinha deve escolher onde colocar os dois *d*'s nas seis posições disponíveis. A primeira posição para o *d* pode ser escolhida de 6 modos e a segunda de 5, o que nos leva a 6×5 modos de fazer essas duas escolhas. No entanto, ao fazer isto estamos

contando cada modo de posicionar os *d*'s duas vezes, uma para cada ordem de escolha das posições; o número correto de possibilidades para o caminho de R a B é, portanto, igual a $\frac{6\times 5}{2}=15$ (os caminhos de R a B podem também ser contados usando diretamente a fórmula $\binom{6}{2}=C_6^2=\frac{6\times 5}{1\times 2}=15$). Desse modo, a formiguinha tem $4\times 15=60$ maneiras diferentes para ir de A até B passando por R.

QUESTÃO 13
(ALTERNATIVA E)

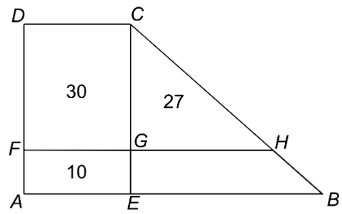


Seja *C* um ponto de coordenadas (r,s) no segmento *AB*, como na figura. Da semelhança dos triângulos *ADC* e *AEB* concluímos que

$$\frac{r-2}{s-2}=\frac{902-2}{602-2}=\frac{3}{2},$$

ou seja, $3s-2r=2$. Como queremos que *r* e *s* sejam inteiros, segue dessa equação que *s* é par. Uma vez assim escolhido *s*, o valor de *r* fica determinado, e desse modo obtemos todos os pontos de coordenadas inteiras no segmento *AB*. Como existem 301 números pares de 2 a 602, inclusive esses, segue que a alternativa correta é (E).

QUESTÃO 14
(ALTERNATIVA C)



Como os retângulos *AEGF* e *FGCD* têm bases iguais e a área de *FGCD* é três vezes a de *AEGF*, segue que $CG=3GE$. Logo a razão de semelhança entre os triângulos *CEB* e *CGH* é dada por

$$\frac{CE}{CG}=\frac{CG+GE}{CG}=\frac{3GE+GE}{3GE}=\frac{4}{3}$$

Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos

$$\text{área}(CEB)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\text{área}(CGH)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times 27=48$$

donde a área do trapézio *EBGH* é $48-27=21\,\text{cm}^2$.

QUESTÃO 15
(ALTERNATIVA A)

Cada uma das três pessoas, em princípio, pode beber água ou suco, logo há $2\times 2\times 2=8$ possibilidades para considerar, conforme a tabela.

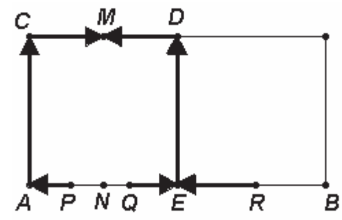
	Ari	**Bruna**	**Carlos**
1	água	água	água
2	suco	água	água
3	água	suco	água
4	suco	suco	água
5	água	água	suco
6	suco	água	suco
7	água	suco	suco
8	suco	suco	suco

Devemos agora analisar as condições do problema para decidir qual das possibilidades é a correta. A primeira condição (*se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água*) elimina as possibilidades 3 e 8. A segunda condição (*se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco*) elimina a possibilidade 2. A terceira condição (*se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água*) elimina as possibilidades 4 e 6. Até o momento, restam as possibilidades 1, 5 e 7.

	Ari	**Bruna**	**Carlos**
1	água	água	água
5	água	água	suco
7	água	suco	suco

e como apenas um deles pede sempre a mesma bebida, chegamos a Ari, que sempre pede água.

QUESTÃO 16
(ALTERNATIVA A)



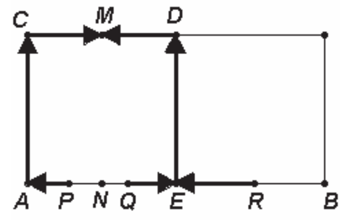
Denotemos por f a função pedida**.** Sendo N o ponto médio do segmento *AE*, vamos considerar três outros pontos *P*, *Q* e *R*, que representam possíveis posições de partida da formiguinha. Para qualquer um desses pontos, sua distância ao ponto *A* será denotada por *x*. Temos três situações:

1ª) a formiguinha parte de um ponto P entre A e N. Nesse caso o menor caminho é: P→A→C→M. Observe que se *x=AP* aumenta (P se aproxima de N), o caminho a ser percorrido também aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que f é **crescente** entre A e N (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a 1).

2ª) a formiguinha parte de um ponto Q entre N e E. Nesse caso o menor caminho é: Q→E→D→M. Observe que se *x=AQ* aumenta (Q se aproxima de E), o caminho a ser percorrido diminui do mesmo comprimento. Isso significa que f é **decrescente** entre N e E (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a -1).

3ª) a formiguinha parte de um ponto R entre E e B. Nesse caso o menor caminho é: R→E→D→M. Observe que se *x=AR* aumenta (R se aproxima de B), o caminho a ser percorrido também aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que f é **crescente** entre E e B (e que seu gráfico, neste trecho, é um segmento de reta de inclinação igual a 1).

Resumindo: entre A e B a função *f* cresce, decresce e torna a crescer (sempre tendo como gráfico um segmento de reta). Apenas a alternativa (A) mostra esse comportamento.



Outra solução: Na figura, marcamos o ponto médio *N* do segmento *AE* e três outros pontos *P*, *Q* e *R*, que representam possíveis posições de partida da formiguinha nos segmentos *AN*, *NE* e *EB*, respectivamente. Para qualquer um desses pontos, sua distância ao ponto *A* será denotada por *x* e vamos adotar o lado do quadrado como unidade de comprimento.

Se a formiguinha sai de *P*, o trajeto mais curto passa por *A* e *C*, como indicado pelas flechas. Nesse caso, a formiguinha vai andar

$$PA + AC + CM = x + 1 + \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

Se a formiguinha sair de *N*, não faz diferença ela passar por *A* e *C* ou por *E* e *D*, pois em qualquer caso ela vai andar $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$ unidades de comprimento. Se ela sai de *Q*, o trajeto mais curto passa por *E* e *D*, e ela vai andar

$$QE + ED + DM = (1 - x) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - x \text{ unidades de comprimento.}$$

Finalmente, se ela sai de *R* ela vai andar

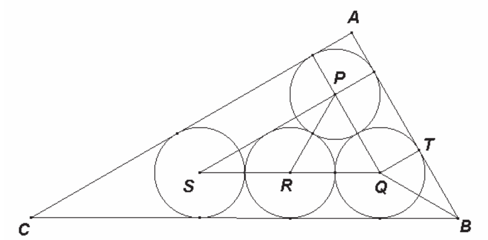
$$RE + ED + DM = (x - 1) + 1 + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

Desse modo, a função que representa a menor distância que a formiguinha deve andar de algum ponto do segmento *AB*, à distância *x* do ponto *A*, até chegar ao ponto *M*, é dada pela função

$$y = \begin{cases} x + \frac{3}{2}, \text{ se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - x, \text{ se } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x + \frac{1}{2}, \text{ se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

cujo gráfico é o da alternativa (A).

QUESTÃO 17
(ALTERNATIVA B)



Notamos primeiro que o triângulo *PQR* é equilátero de lado 2 cm. Como o segmento *RS* também mede 2 cm, o triângulo *PRS* é isósceles de base *PS*. O ângulo $P\hat{R}S$ mede 120°, pois ele é externo ao triângulo *PRQ*, igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, cada um medindo 60°. Logo cada um dos ângulos $R\hat{S}P$ e $R\hat{P}S$ mede 30°, e concluímos que o triângulo *PQS* é retângulo em *P*, com $P\hat{Q}S = 60^\circ$ e $P\hat{S}Q = 30^\circ$. Logo o triângulo *ABC* é retângulo em *A* com $A\hat{B}C = 60^\circ$ e $A\hat{C}B = 30^\circ$, pois seus lados são paralelos aos do triângulo *PQS*. Além disso, seu menor lado é AB, oposto ao menor ângulo $A\hat{C}B = 30^\circ$.
Para calcular o comprimento do lado *AB*, basta calcular *BT*, pois claramente $AT = 3$ cm. Notamos que o triângulo *QBT* é retângulo em *T*. Como *BQ* é bissetriz de $A\hat{B}C$, segue que $T\hat{B}Q = 30^\circ$. Como $QT = 1$ cm, segue que $BQ = 2$ cm, e o teorema de Pitágoras nos dá

$$BT = \sqrt{QB^2 - QT^2} = \sqrt{3}\text{, donde } AB = 3 + \sqrt{3}.$$

QUESTÃO 18
(ALTERNATIVA D)
Notamos primeiro que se um estojo recebe duas etiquetas então suas três canetas têm a mesma cor, logo esse estojo vai receber as três etiquetas; ou seja, um estojo recebe apenas uma das ou as três etiquetas, nunca apenas duas delas. No dia descrito no enunciado, foram usadas $120 + 150 + 200 = 470$ etiquetas, das quais $470 - 200 = 270$ foram para estojos que receberam três etiquetas. Logo o número de estojos que receberam três etiquetas foi de $\frac{270}{3} = 90$, e, assim, o número total de estojos montados nesse dia foi de $200 + 90 = 290$.

QUESTÃO 19
(ALTERNATIVA C)
Como $\frac{2}{5}$ do número de alunos baianos é um número inteiro e $\frac{2}{5}$ é uma fração irredutível, concluímos que o número de baianos é múltiplo de 5. Do mesmo modo concluímos que o número de mineiros é múltiplo de 7. Os múltiplos de 5 menores do que 31 são 5, 10, 15, 20, 25 e 30 e os múltiplos de 7 menores que 31 são 7, 14, 21, 28 (não incluímos o 0 entre os múltiplos pois o enunciado diz que há tanto baianos como mineiros no ônibus). Como 31 é a soma do número de baianos com o número de mineiros, a única possibilidade é que o ônibus tenha 10 baianos e 21 mineiros. Como $\frac{2}{5}$ do número de alunos baianos é de homens, segue que $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ é de mulheres. Logo o total de mulheres no ônibus é

$$\frac{3}{5} \times 10 + \frac{3}{7} \times 21 = 6 + 9 = 15$$

Observação: É importante notar que a irredutibilidade das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$ é essencial no argumento acima.

Sabemos, por exemplo, que $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ e que $\frac{6}{14} \times 21 = 9$ mas 14 não é um divisor de 21.

QUESTÃO 20
(ALTERNATIVA D)
Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes, listadas abaixo:

1. cara, cara, cara – probabilidade $\frac{1}{8}$
2. cara, cara, coroa – probabilidade $\frac{1}{8}$
3. cara, coroa – probabilidade $\frac{1}{4}$
4. coroa, cara – probabilidade $\frac{1}{4}$
5. coroa, coroa – probabilidade $\frac{1}{4}$

Ele termina com coroa nas alternativas 2, 3 e 5.

Como as alternativas acima são mutuamente exclusivas, a probabilidade de sua última jogada ser coroa é $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.