Soluções

Nível 3
Ensino Médio

1. (alternativa D) Cinco voltas na praça correspondem a $5\times 4=20$ lados do quadrado. Sueli caiu quando faltavam $\frac{2}{7}$ para completar esse percurso, ou seja, depois de percorrer $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ do trajeto total. Isto equivale a $\frac{5}{7}\times 20=\frac{100}{7}=\frac{98}{7}+\frac{2}{7}=14+\frac{2}{7}$ lados do quadrado. Como $14=3\times 4+2$, ela deu 3 voltas completas na praça e andou mais 2 lados, o que a levou ao ponto C. Depois disso ela ainda andou $\frac{2}{7}$ de um lado; como $\frac{2}{7}$ é menor que 1, ela não chegou ao próximo vértice do quadrado. Logo ela caiu no ponto D.

2. (alternativa E) Vamos usar o símbolo $\approx$ para indicar "aproximadamente igual a"; ou seja, $x\approx y$ quer dizer que x é aproximadamente igual a y. Por exemplo, $0{,}899\approx 0{,}9$ e $0{,}101\approx 0{,}1$. Em geral, se em uma operação aritmética trocamos os números envolvidos por outros aproximadamente iguais a eles, o resultado da operação deve ser uma aproximação do que teríamos obtido com os números originais. No nosso caso, temos

$$(0{,}899^2-0{,}101^2)\times 0{,}5\approx(0{,}9^2-0{,}1^2)\times 0{,}5=(0{,}81-0{,}01)\times 0{,}5=0{,}8\times 0{,}5=0{,}4\,.$$

Outra maneira de resolver esta questão é usar a identidade $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para escrever

$$\begin{aligned}(0{,}899^2-0{,}101^2)\times 0{,}5&=(0{,}899+0{,}101)(0{,}899-0{,}101)\times 0{,}5\\&\approx(0{,}9+0{,}1)\times(0{,}9-0{,}1)\times 0{,}5=1\times 0{,}8\times 0{,}5=0{,}4\end{aligned}$$

3. (alternativa C) Como $x=y=2z$ temos $xyz=(2z)(2z)z=4z^3$, donde $4z^3=864$. Logo $z^3=\frac{864}{4}=216$, e segue que $z=\sqrt[3]{216}=6$. Obtemos então

$$x+y+z=2z+2z+z=5z=5\times 6=30\,.$$

4. (alternativa B) Como o hexágono é regular, suas diagonais são iguais. Logo o triângulo ACE da figura I é equilátero, e segue que $C\hat{A}E=60^{\circ}$. Além disso, como AD é um dos eixos de simetria do hexágono, o triângulo APQ é isósceles; como ele já tem um ângulo de 60° segue que ele é equilátero.

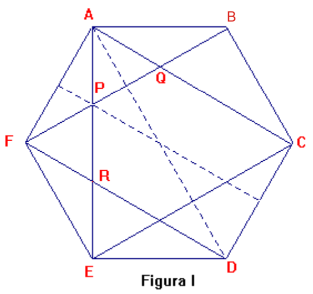


Figura I

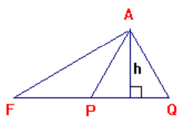


Figura II

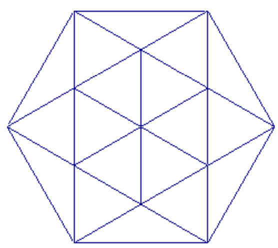


Figura III

O mesmo raciocínio mostra que o triângulo FRP também é equilátero. Como o hexágono tem outro eixo de simetria que passa por P, os triângulos APQ e FRP são congruentes; como ambos são equiláteros todos os seus lados são iguais, e em particular temos $PQ=FP$. Assim, os triângulos AFP e APQ têm bases iguais e a mesma altura, que denotamos por h na figura II. Denotemos agora por a a área do triângulo APQ; temos então

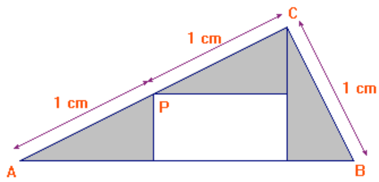
$$a = \text{área}(APQ) = \frac{1}{2}PQ \times h = \frac{1}{2}FP \times h = \text{área}(AFP).$$

Isso mostra que na figura III o hexágono está dividido em 18 triângulos de área a; segue que $18a = 45$, donde $a = \frac{45}{18} = 2{,}5\ \text{cm}^2$.

5. (alternativa D) As instruções dizem que ovos e creme não podem estar juntos no bolo, bem como leite e laranja; isso elimina as opções (B), (C) e (E). Elas dizem também que um bolo sem creme não pode ter leite, o que elimina a opção (A)

6. (alternativa D) A primeira etapa da viagem do José só pode ter sido C $\to$ E ou E $\to$ C, pois $4+9=13$ é o único modo de percorrer 13 km entre cidades nessa estrada. Como todas as cidades distam de C menos que 21 km, o percurso inicial foi C $\to$ E. Percorrendo 21 km a partir de E levou José à cidade A e mais 12 km o levam à cidade D, que é onde mora sua mãe.

7. (alternativa A) Como os triângulos sombreados são congruentes, os segmentos AP e PC da figura medem ambos 1 cm. Logo os catetos do triângulo ABC medem 1 cm e 2 cm, e o teorema de Pitágoras nos diz que $AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Segue que $AB = \sqrt{5}$ cm, donde o perímetro do triângulo ABC é $1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ cm.



8. (alternativa A) Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então seu peso é cinco vezes o preço da outra; isto equivale a dizer que se uma turmalina pesa a metade de outra, então seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividí-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2 também iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma de valor $\frac{1000}{5} = 200$ reais. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo $\frac{200}{5} = 40$ reais; essas 4 turmalinas juntas valem $4 \times 40 = 160$ reais.

Podemos esquematizar a solução da seguinte forma, mostrando como calcular o preço de uma das quatro turmalinas menores:

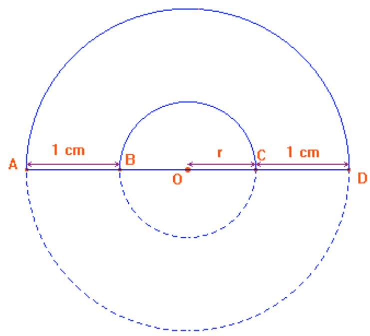
$$\underbrace{\text{peso inicial}}_{\text{valor: }1000} \xrightarrow[\text{valor}\div 5]{\text{peso}\div 2} \underbrace{\frac{1}{2}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: }1000\div 5=200} \xrightarrow[\text{valor}\div 5]{\text{peso}\div 2} \underbrace{\frac{1}{4}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: }200\div 5=40}$$

9. (alternativa C) Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

polígono	perímetro (em ℓ)	área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$
IV	34	$25 - 7 = 18$

Desse modo, a correspondência é I $\to$ (20,25), II $\to$ (20,22), III $\to$ (30,18) e IV $\to$ (34,20). Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro), logo estão na mesma vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima, e segue que para estes pontos a correspondência correta é I $\to$ C e II $\to$ B. Por outro lado, os pontos correspondentes a III e IV têm a mesma ordenada (área), logo estão na mesma horizontal no plano cartesiano; como o ponto correspondente a IV tem abscissa (perímetro) maior, ele está mais à direita. Segue que para esses pontos a correspondência correta é III $\to$ D e IV $\to$ A.

10. (alternativa D) Consideremos as circunferências que determinam os dois semicírculos, como na figura. O segmento AD é um diâmetro da circunferência maior e BC um diâmetro da menor. O centro da circunferência menor é o ponto médio O de BC; como $AB = CD$ esse ponto também é ponto médio do segmento AD, ou seja, ele também é o centro da circunferência maior.



Vamos denotar por r o raio da circunferência menor; então o raio da maior é $r+1$. Como o perímetro de uma circunferência é $2\pi \times raio$, segue que a primeira formiguinha andou $\pi(r+1)$ cm e a segunda $1+\pi r+1 = 2+\pi r$ cm. Logo a diferença entre os percursos é $\pi(r+1)-(2+\pi r) = \pi r + \pi - 2 - \pi r = \pi - 2$ cm.

11. (alternativa B) Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

12. (alternativa C) Vamos denotar por x o outro número. Como os 3 números que aparecem em cada linha são todos diferentes, x é diferente de 5 e de 8. Como cada número aparece uma única vez em cada linha, segue que esses números aparecem, cada um, exatamente três vezes na tabela.
Notamos que o 5 não pode aparecer na casa central. De fato, se ele estivesse nessa casa então as casas em cinza da tabela abaixo não poderiam conter outro 5; como os números em cada

linha são diferentes, a única possibilidade para os outros dois números 5 seria preencher uma das duas diagonais, o que não pode acontecer pois $5+5+5=15$ é ímpar.

	5	

➔

5		
	5	
		5

ou

		5
	5	
5		

Vamos então tentar o 8 na casa central. Analogamente, teremos que ter 8 em uma das diagonais:

	8	

➔

8		
	8	
		8

ou

		8
	8	
8		

Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:

8		
	8	
		8

➔

8	5	
	8	5
5		8

➔

8	5	x
x	8	5
5	x	8

ou

8		
	8	
		8

➔

8	x	
	8	x
x		8

➔

8	x	5
5	8	x
x	5	8

Para satisfazer todas as condições do problema, as somas nas diagonais devem ser iguais. Em ambas as formas acima isso leva a $24=5+8+x=13+x$, donde $x=11$ e os tabuleiros acima são

8	5	11
11	8	5
5	11	8

ou

8	11	5
5	8	11
11	5	8

A outra opção leva a um resultado análogo, e vemos que em qualquer caso a soma das diagonais é 24.
Resta ainda analisar o caso em que o x está na casa central. Como antes, devemos ter uma das duas diagonais preenchida com x:

	x	

➔

x		
	x	
		x

ou

		x
	x	
x		

Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:

x		
	x	
		x

➔

x	5	
	x	5
5		x

➔

x	5	8
8	x	5
5	8	x

ou

x		
	x	
		x

→

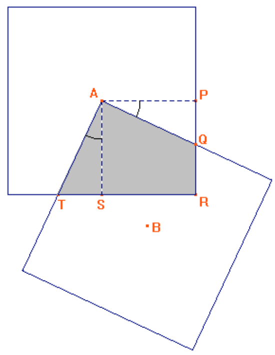
x	8	
	x	8
8		x

→

x	8	5
5	x	8
8	5	x

Ambas mostram que $3x = 5 + x + 8 = 13 + x$, donde $2x = 13$. A segunda opção leva à mesma equação; como ela não tem solução para x natural, concluímos que x não pode estar na casa central.

13. (alternativa E) Para resolver essa questão, precisamos saber qual é a área coberta de cada um dos três quadrados de centros *A, B* e *C*. Para isso, vamos considerar a figura ao lado, onde representamos os quadrados de centros *A* e *B*. A área coberta no quadrado de centro *A* é o polígono sombreado *AQRT*.



Pelo ponto *A* traçamos as perpendiculares *AP* e *AS* aos lados do quadrado. Como *A* é o centro do quadrado, é imediato que *APRS* é um quadrado; sua área é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior, ou seja, é $\frac{1}{4} \times 100 = 25\,\text{cm}^2$. Além disso os ângulos $P\hat{A}Q$ e $S\hat{A}T$, marcados na figura, são iguais; de fato, temos

$$P\hat{A}Q \;=\; P\hat{A}S - Q\hat{A}S \;=\; 90^\circ - Q\hat{A}S = \; Q\hat{A}T - Q\hat{A}S = S\hat{A}T\,.$$

Segue que os triângulos *APQ* e *AST* são congruentes, pois são triângulos retângulos com um lado e um ângulo comuns. Logo

$$\begin{aligned}\text{área}(AQRT) &= \text{área}(AST) + \text{área}(AQRS) = \text{área}(APQ) + \text{área}(AQRS)\\ &= \text{área}(APRS) = 25\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Do mesmo modo, as áreas cobertas nos quadrados de centros *B* e *C* são iguais a 25 cm². Logo a área da figura é $3 \times 75 + 100 = 325\,\text{cm}^2$.

14. (alternativa B) A decomposição de 50 em fatores primos é $50 = 2 \times 5^2$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $(2\times 5^2)^3 < 5^p < (2 \times 5^2)^4$, ou seja, $2^3 \times 5^6 < 5^p < 2^4 \times 5^8$. Dividindo todos os termos por 5^6, obtemos $2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \times 5^2$, ou seja, $8 < 5^{p-6} < 400$. As únicas potências de 5 que estão entre 8 e 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$; logo $p-6$ só pode assumir os valores 2 e 3, donde *p* só pode assumir os valores 8 e 9.

15. (alternativa E) Seja *n* um número de dois algarismos, sendo *a* seu algarismo das dezenas e *b* o das unidades; então $n = 10a + b$. Se *a* e *b* são ambos diferentes de zero, o contrário de *n* é $10b + a$. Desse modo, a soma de *n* e de seu contrário é.

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$$

e portanto a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.

As outras opções são todas somas de um número com seu contrário; de fato, $44 = 13 + 31$, $99 = 18 + 81$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 69 + 96$.

Como foram achadas essas expressões? Tomemos, como exemplo, $165 = 11 \times 15$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 15, então 165 será a soma do número $10a + b$ e de seu contrário. Por exemplo, podemos tomar $a = 6$ e $b = 9$; para essa escolha obtemos a expressão $165 = 69 + 96$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, $a = 8$ e $b = 7$ leva a $165 = 87 + 78$. O mesmo raciocínio serve para as outras alternativas.

16. (alternativa C) O gráfico mostra que com uma mistura contendo 30% de álcool o carro de Cristina rende 15 km/l. Para a primeira etapa de 300 km, ela gastou então $\frac{300}{15} = 20$ litros de combustível, restando no tanque $50 - 20 = 30$ litros com 30% de álcool. Desses 30 litros 30%, ou seja, $\frac{30}{100} \times 30 = 9$ litros eram de álcool e os restantes $30 - 9 = 21$ litros, de gasolina. Para completar o tanque ela colocou 20 litros de álcool; o tanque ficou então cheio com $9 + 20 = 29$ litros de álcool e os mesmos 21 litros de gasolina. Nessa mistura o percentual de álcool era de $\frac{29}{50} = \frac{58}{100} = 58\%$, que é aproximadamente 60%. O gráfico mostra que com essa mistura o carro de Cristina rende aproximadamente 13,5 km/l. Como ela chegou a seu destino com o tanque praticamente vazio, ela percorreu aproximadamente $13{,}5 \times 50 = 675$ km. Logo, a viagem de Cristina foi de aproximadamente $300 + 675 = 975$ km.

17. (alternativa C) A flecha que aponta para baixo na tabela passa pelos quadrados dos números ímpares: $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ e assim por diante.

									...
								...	
	37	36	35	34	33	32	31		
	38	17	16	15	14	13	30		
	39	18	5	4	3	12	29		
	40	19	6	1	2	11	28	...	
	41	20	7	8	9	10	27	...	
	42	21	22	23	24	25	26	51	
	43	44	45	46	47	48	49	50	

Vamos chamar de a_n o n-ésimo termo de nossa seqüência; por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 13$ e $a_4 = 31$. Observando a tabela, vemos que

$$1^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 1^2+1=2 \xrightarrow{\text{1 casa para cima}} 1^2+1+1=3=a_2$$
$$3^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 3^2+1=10 \xrightarrow{\text{3 casas para cima}} 3^2+1+3=13=a_3$$
$$5^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 5^2+1=26 \xrightarrow{\text{5 casas para cima}} 5^2+1+5=31=a_4$$

e assim por diante. Vemos então que a lei de formação da seqüência, a partir de a_2, é

$$a_2 = [1^{\text{o}}\,\text{ímpar}]^2 + 1 + 1^{\text{o}}\,\text{ímpar}$$
$$a_3 = [2^{\text{o}}\,\text{ímpar}]^2 + 1 + 2^{\text{o}}\,\text{ímpar}$$
$$a_4 = [3^{\text{o}}\,\text{ímpar}]^2 + 1 + 3^{\text{o}}\,\text{ímpar}$$

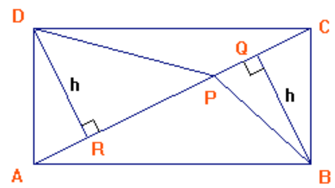
e, em geral,

$$a_n = [(n-1)^{\text{o}}\,\text{ímpar}]^2 + 1 + (n-1)^{\text{o}}\,\text{ímpar}$$

Logo $a_{30} = [29^{\text{o}}\,\text{ímpar}]^2 + 1 + 29^{\text{o}}\,\text{ímpar}$, e como o 29^{o} número ímpar é 57 segue que $a_{30} = 57^2 + 1 + 57 = 3307$.

Mais geralmente, o $(n-1)^{\text{o}}$ número ímpar é $2(n-1)-1 = 2n-3$ e segue que $a_n = (2n-3)^2 + 1 + (2n-3) = 4n^2 - 10n + 7$.

18. (alternativa B) Inicialmente notamos que a função é decrescente, pois à medida que x cresce a área $(BCDP)$ decresce; isso elimina as alternativas (A) e (D). Notamos também que como os triângulos ACB e ACD são congruentes, suas alturas BQ e DR são iguais; vamos denotá-las por h, como na figura. Então os triângulos BCP e DCP têm a mesma base CP e a mesma altura h, donde



$$\text{área }(BCP) = \frac{CP \times h}{2} = \text{área }(DCP).$$

Logo

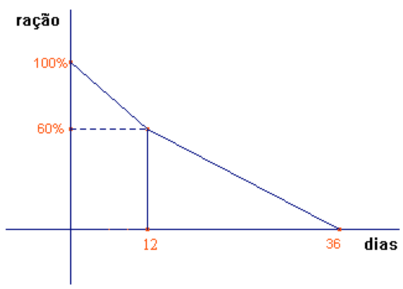
$$\text{área }(BCDP) = \text{área }(BCP) + \text{área }(DCP) = 2 \times \frac{CP \times h}{2} = CP \times h.$$

Vamos denotar por a o comprimento da diagonal AC. Então $CP = a - x$ e temos

$$\text{área }(BCDP) = (a-x)h = ah - hx.$$

Como ah e h são constantes, segue que a área $(BCDP)$ é uma função linear de x, o que elimina as alternativas (C) e (E).

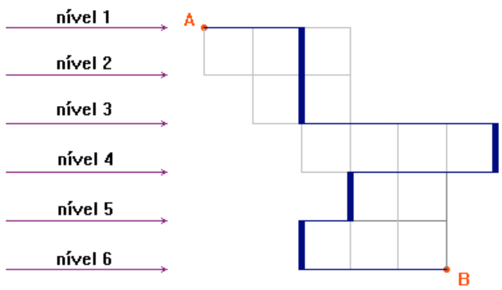
19. (alternativa B) Vamos denotar por u a quantidade de ração que uma vaca come em um dia. No início o fazendeiro tinha ração suficiente para alimentar 20 vacas por 30 dias; logo, ele tinha $20 \times 30 = 600\,u$ de ração. O gráfico indica que no dia da venda ele já havia gasto 40%



da ração, ou seja, $\frac{40}{100}\times 600 = 240\,u$. Como as 20 vacas comem 20 u de ração por dia, a venda ocorreu no $\frac{240}{20} = 12^{\text{o}}$ dia.

Vamos denotar por x o número de vacas que ele vendeu. Ele ficou então com $20 - x$ vacas, e as $600 - 240 = 360\,u$ de ração que ele tinha no momento da venda foram suficientes para alimentar essas vacas por $36 - 12 = 24$ dias. Logo $(20 - x)\times 24 = 360$, donde $20 - x = \frac{360}{24} = 15$, ou seja, $x = 5$.

20. (alternativa E) Para ir de A até B a formiguinha tem que descer do nível 1 até o nível 6, conforme a figura. O caminho que a formiguinha segue é determinado pela escolha do segmento vertical que ela vai usar para passar de um nível para o seguinte, pois o caminho horizontal que liga dois segmentos verticais ligando níveis consecutivos é único. Como exemplo mostramos na figura, em traço mais forte, os segmentos que ela escolheu para fazer o caminho ilustrado no enunciado. O número de segmentos que ela pode usar para passar de um nível para o outro está tabulado a seguir:



$1 \to 2$: 4 segmentos	$4 \to 5$: 3 segmentos
$2 \to 3$: 3 segmentos	$5 \to 6$: 4 segmentos
$3 \to 4$: 5 segmentos	

Segue que o número de maneiras que nossa formiguinha tem para ir de A até B é $4\times 3\times 5\times 3\times 4 = 720$.