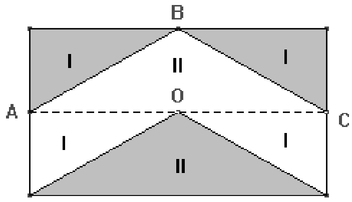
2ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2006
Somando novos talentos para o Brasil

Soluções do Nível 3 (Ensino Médio) – 1ª Fase

---

1. (alternativa C)
Como *A, B e C* são pontos médios, os quatro triângulos rotulados com I na figura ao lado são congruentes, bem como os dois indicados por II. Logo

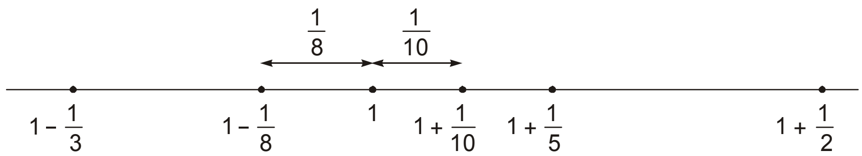


$$\text{área branca} = 2 \text{ triângulos I} + 1 \text{ triângulo II}$$

$$\text{área sombreada} = 2 \text{ triângulos I} + 1 \text{ triângulo II}$$

o que mostra que a área sombreada é igual à área em branco. Logo cada uma delas corresponde à metade da área do retângulo.

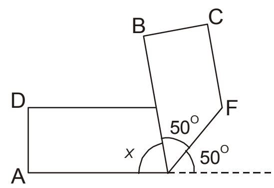
2. (alternativa E)
Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ temos $1+\frac{1}{10} < 1+\frac{1}{5} < 1+\frac{1}{2}$, e como $\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$ temos $1-\frac{1}{3} < 1-\frac{1}{8}$. Logo estes números estão dispostos na reta como indica a figura:



Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$ segue que o número mais próximo de 1 é $1+\frac{1}{10}$.

3. (alternativa D)
Lemos na régua que *x* é maior que 1,5 e menor que 2, isto é, $1{,}5 < x < 2$. Como 2 é positivo, podemos multiplicar todos os membros das duas desigualdades por 2 sem alterar os sinais, obtendo $3 < 2x < 4$. Somando -2 a cada membro obtemos $1 < 2x - 2 < 2$, ou seja, $2x-2$ está entre 1 e 2. Os números entre 1 e 2 assinalados na régua são *U* e o próprio *x*. Não é possível $2x-2=x$ pois neste caso $x=2$, o que contradiz o fato $x<2$. Logo só podemos ter $2x-2=U$.

4. (alternativa C)
Observando a figura da fita dobrada vemos que $x+50^{o}+50^{o}=180^{o}$,
donde $x=80^{o}$.



5. (alternativa D)
Solução 1: Sejam *a, b* e *c* os comprimentos dos lados do triângulo. Logo $a \times b = 60$, $b \times c = 140$ e $a \times c = 84$. Segue que

- *a* é divisor comum de 60 e 84, ou seja, as possibilidades para *a* são 1, 2, 3, 4, 6 e 12
- *b* é divisor comum de 60 e 140, ou seja, as possibilidades para *b* são 1, 2, 3, 5, 10, 20
- *c* é divisor comum de 84 e 140, ou seja, as possibilidades para *c* são 1, 2, 4, 7, 14, 28

Escolhemos agora as possibilidades que satisfazem $a \times b = 60$, $b \times c = 140$ e $a \times c = 84$:

a × b = 60		a × c = 84		b × c = 140	
a	**b**	**a**	**c**	**b**	**c**
3	20	3	28	5	28
6	10	6	14	10	14
12	5	12	7	20	7

A linha sombreada na tabela é a única em que os valores de a, b e c coincidem nas três colunas. Logo a = 6, b = 10 e c = 14 e o perímetro do triângulo é $6+10+14=30$.

Solução 2: Como $ab = 60$ e $ac = 84$ segue que $a^2bc = 60 \times 84 = 5040$. Temos também $bc = 140$, donde $a^2 \times 140 = 5040$. Segue que $a^2 = 36$ e portanto $a = 6$. Logo $b = 10$ e $c = 14$.

6. (alternativa A)

As informações do gráfico são dadas nas três primeiras colunas da tabela abaixo:

Cidade	População em 1990	População em 2000	Aumento da população	Aumento proporcional da população
I	30	50	$50-30=20$	$\frac{20}{30}$
II	60	50	decresceu	não teve
III	70	70	$70-70=0$	0
IV	100	150	$150-100=50$	$\frac{50}{100}$
V	120	130	$130-120=10$	$\frac{10}{120}$

Como $\frac{20}{30}$ é maior que $\frac{50}{100}$ e $\frac{10}{120}$. Concluímos que o maior aumento percentual de população entre 1990 e 2000 ocorreu na cidade I.

Na forma percentual, $\frac{20}{30} \approx 67\%$, $\frac{50}{100} = 50\%$ e $\frac{10}{120} \approx 8{,}3\%$.

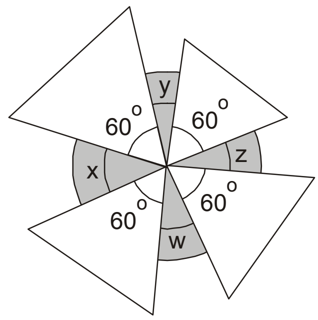
7. (alternativa D)

Se n é um natural maior que 0, então 10^n é um número da forma $1\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ zeros}}$. Logo

$$1+10+10^2+10^3+\cdots+10^{2004}+10^{2005}+10^{2006} = \underbrace{111\ldots\ldots111}_{2007\text{ algarismos}}$$

donde a soma dos algarismos desse número é 2007.

8. (alternativa B)



Como os quatro triângulos são equiláteros, cada um de seus ângulos mede 60°. Logo a soma dos ângulos *x, y, z* e *w* na figura é $x+y+z+w+360° - 4\times 60° = 360° - 240° = 120°$.

Como $360° \div 120° = 3$ a área cinza representa $\frac{1}{3}$ da área do círculo, ou seja, ela mede $36 \div 3 = 12$ cm^2.

9. (alternativa D)

	2		
1			
2		**x**	3
		1	

Na casa marcada com **x** só podemos colocar o 4

→

	2		
1			
2	**y**	4	3
		1	

Podemos então colocar o 1 na casa marcada com **y**

→

	2	**z**	
1			
2	1	4	3
		1	

Na casa marcada com **z** só pode aparecer o 3

→

u	2	3	
1		**w**	
2	1	4	3
v		1	

Podemos agora completar as casas marcadas com **u**, **v** e **w** com 4, 3 e 2 respectivamente

e agora fica fácil completar a tabela

4	2	3	1
1	3	2	4
2	1	4	3
3	4	1	2

Logo a soma pedida é $4+3+4+2=13$

10. (alternativa E)

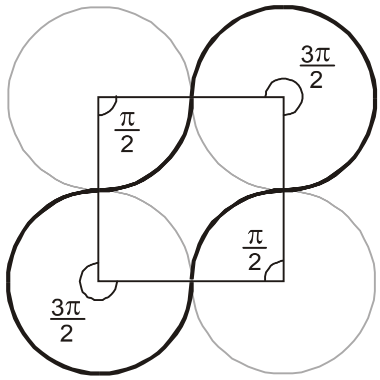
O número de questões de Aritmética que Júlia acertou foi 70% de 30 $= \dfrac{70}{100} \times 30 = 21$. Por outro lado o total de questões que ela acertou foi 80% de $(30 + 50) = \dfrac{80}{100} \times 30 = 64$. Assim, Júlia acertou $64 - 21 = 43$ das 50 questões de Geometria. Logo o percentual de acertos em Geometria foi de $\dfrac{43}{50} = \dfrac{86}{100} = 86\%$.

11. (alternativa C)

Ao montar o cubo, a face branca e a face cinza ficam opostas; logo as alternativas (A) e (B) estão excluídas. As alternativas (D) e (E) estão excluídas pois no cubo não podem aparecer um retângulo branco e outro cinza com um lado menor em comum.

12. (alternativa D)

A linha é composta de dois arcos de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos e dois arcos de $\dfrac{3\pi}{2}$ radianos. Como o raio das circunferências é 2 cm , segue que o comprimento da linha é $\left(2\times\dfrac{\pi}{2}+2\times\dfrac{3\pi}{2}\right)\times 2 = 8\pi$ cm.



13. (alternativa C)

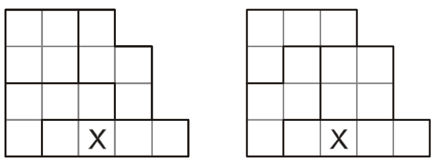
O termo da seqüência com 8001 algarismos é formado por 1000 agrupamentos de 8 algarismos da forma 12345432 seguidos do algarismo 1, como no diagrama abaixo:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{12345432}_{\text{2 algarismos 4}}\ \underbrace{12345432}_{\text{2 algarismos 4}}\ldots\ldots\underbrace{12345432}_{\text{2 algarismos 4}}\ \underbrace{12345432}_{\text{2 algarismos 4}}}_{\text{1000 agrupamentos de 12345432} \longleftrightarrow \text{8000 algarismos}}\ 1}_{\text{8001 algarismos}}$$

Em cada um dos 1000 agrupamentos o algarismo 4 aparece duas vezes, logo ele aparece 2000 vezes no total.

14. (alternativa A)

Por tentativa e erro vemos que há apenas duas maneiras de cobrir a figura com quatro peças, conforme mostrado abaixo. Em ambas, a casa com o X é coberta pela peça I.



15. (alternativa C)

Para que o produto seja 100, cada algarismo deve ser um divisor de 100. Os algarismos divisores de 100 são 1, 2, 4 e 5. Não é possível obter o produto 100 com números que tenham apenas 1 ou 2 algarismos, logo os números procurados têm 3 ou 4 algarismos, por serem menores que 10 000.Vejamos como obter o produto 100 com 3 ou 4 desses algarismos. Para facilitar a listagem observamos que 8 não é divisor de 100, donde os algarismos 2 e 4 não podem aparecer num mesmo número. Logo os números procurados são:

- números de 3 algarismos: 455, 545, 554
- números de 4 algarismos: 1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541, 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225.

em um total de 21 números.

16. (alternativa C)
O número de maneiras de retirarmos duas bolas da caixa é 10, o que podemos ver listando as possibilidades: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5} e {4,5}. O 4 é o maior número escolhido em {1,4}, {2,4} e {3,4}, ou seja, em 3 casos. Logo a probabilidade pedida é $\frac{3}{10}$.

17. (alternativa B)
A formiguinha (i) primeiro se afasta do centro, depois (ii) fica algum tempo à distância constante do centro, enquanto anda sobre a circunferência e finalmente (iii) retorna ao centro. A observação (ii) elimina as alternativas (C), (D) e (E) e a observação (iii) elimina a alternativa (A).

18. (alternativa D)
O que o avô de Júlia disse pode ser escrito como

$$\underbrace{\text{idade em 1980}}_{x} = 1980 - \underbrace{\text{ano de nascimento}}_{x^2}$$

ou seja, $x = 1980 - x^2$. Logo $x^2 + x - 1980 = 0$; esta equação tem as raízes

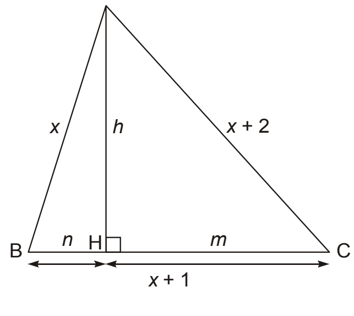
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1980}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7921}}{2} = \frac{-1 \pm 89}{2}$$

Segue que, em 1980 o avô de Júlia tinha 44 anos e assim, em 2006, ele completa $44 + (2006 - 1980) = 44 + 26 = 70$ anos.
Comentário: Um modo rápido de calcular $\sqrt{7921}$ é notar que $90^2 = 8100$. Daí segue que $\sqrt{7921}$ é um número próximo de e menor que 90 terminado em 1 ou 9. Os candidatos naturais são 81 e 89, e verifica-se imediatamente que $89^2 = 7921$.

19. (alternativa D)
Colocando $AB = x$ temos $BC = x + 1$ e $AC = x + 2$. Seja $AH = h$ a altura relativa a BC. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos ABH e AHC obtemos $n^2 + h^2 = x^2$ e $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$. Segue que $h^2 = x^2 - n^2$ e $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$, donde $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$, ou seja, $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$.
Usando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a - b)$ obtemos então

$$(x + 2 - x)\,(x + 2 + x) = (m - n)\,(m + n)$$

Como $m + n = x + 1$ segue que $2(2x + 2) = (m - n)\,(m + n)$, segue que, donde $4(x + 1) = (m - n)\,(x + 1)$. Como $x + 1 \neq 0$ podemos dividir ambos os membros desta última expressão por $x + 1$ e obtemos finalmente $m - n = 4$.



20. (alternativa E)
A multiplicação pode ser esquematizada como

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & a \end{array}$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

<u>a só pode ser 1 ou 2</u> porque se $a \geq 3$ então $4a$ é um número de 2 algarismos e portanto o número *edcba* teria 6 algarismos. Mas a não pode ser 1 pois *edcba*, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo $a = 2$.

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & 2 \end{array}$$

<u>e só pode ser 8 ou 9</u> porque $2 \times 4 = 8$ e *edcba* tem apenas 5 algarismos. No entanto, e não pode ser 9 porque 9×4 termina em 6 e não em 2. Logo $e = 8$.

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & b & 2 \end{array}$$

<u>b só pode ser 1 ou 2</u> porque $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de *abcde* são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & 1 & 2 \end{array}$$

<u>d só pode ser 2 ou 7</u> porque $4 \times d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de *abcde* são distintos só podemos ter $d = 7$.

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & c & 1 & 2 \end{array}$$

<u>c só pode ser 9</u> porque $4c + 3$ é um número terminado em c.

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 9 & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$