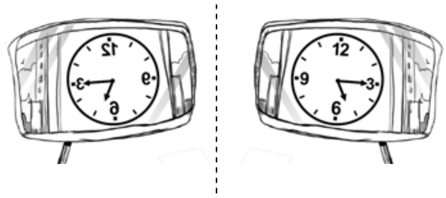
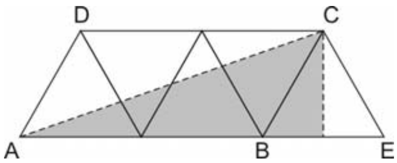
QUESTÃO 1
ALTERNATIVA A



Na imagem que aparece no espelho do Benjamim, o ponteiro dos minutos aponta para o número 3, enquanto que o ponteiro das horas está entre o algarismo 6 e o traço correspondente ao algarismo 5, mais próximo deste último. Deste modo, o relógio marcava 5h 15min.

Outra maneira de enxergar o resultado é imaginar que a imagem que aparece no espelho do Benjamim voltará ao normal se for novamente refletida em um espelho. Fazemos isto na figura ao lado e vemos imediatamente que a hora marcada era 5h 15min.



QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
Podemos decompor a figura no paralelogramo *ABCD* e no triângulo *BEC*. Em cada uma destas figuras a área sombreada corresponde a metade da área, e assim a área sombreada na figura original é a metade da área total.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA B
A quantidade de água que Daniela gastava por semana (isto é, em 7 dias) em cada atividade era:

- *lavar roupa*: $7 \times 150 = 1050$ litros;
- *banho de 15 minutos*: $7 \times 90 = 630$ litros;
- *lavar o carro com mangueira*: $1 \times 100 = 100$ litros.

Assim, ela gastava $1050 + 630 + 100 = 1780$ litros por semana. Com a economia, Daniela passou a gastar semanalmente em cada atividade:

- *lavar roupa no tanque*: $3 \times 150 = 450$ litros;
- *banho de 5 minutos*: $7 \times \frac{90}{3} = 7 \times 30 = 210$ litros;
- *lavar o carro com balde*: $1 \times 10 = 10$ litros,

ou seja, um total de $450 + 210 + 10 = 670$ litros. Portanto, ela passou a economizar por semana $1780 - 670 = 1110$ litros de água.

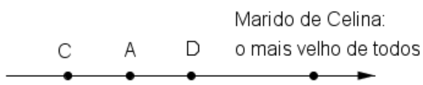
Podemos também pensar diretamente na economia semanal da Daniela:

- 4 *lavagens de roupa*: $4 \times 150 = 600$ litros;
- $\frac{2}{3}$ *banho por dia*: $7 \times \frac{2}{3} \times 90 = 420$ litros;
- *substituir a mangueira pelo balde:* $100 - 10 = 90$,

o que nos dá o total de $600 + 420 + 90 = 1110$ litros.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA E
A primeira torneira enche $\frac{1}{8}$ tanque/hora e a segunda $\frac{1}{4}$ tanque/hora; as duas juntas enchem então $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ tanque/hora. A primeira torneira, aberta por 2 horas, encheu $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ do tanque, deixando vazio $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ do tanque. As duas torneiras juntas levaram então $\frac{3/4}{3/8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2$ horas para acabar de encher o tanque, que ficou cheio 4 horas após o meio dia, ou seja, às 16:00h.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA C
Na figura ao lado**,** A representa a idade de Arnaldo, C a de Celina e D a de Dalila; a flecha indica o sentido de idade crescente. A ordem das letras C, A e D indica que Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. Logo o esposo de Celina é Beto, que é também o mais velho de todos.



QUESTÃO 6
ALTERNATIVA A
Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para *a* e *b* em $a*b=(a+1)\times(b-1)=24$ e testá-las em $b*a=(b+1)\times(a-1)=30$ para achar os possíveis valores de *a* e *b*. Fazemos isto na tabela a seguir.

$24=$	a	b	$(b+1)\times(a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a>0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	**30**
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

Logo $a=7$ e $b=4$, donde $a+b=11$.

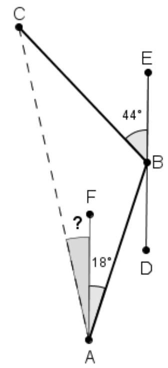
De modo mais algébrico, podemos resolver este problema como segue. Temos $a*b=(a+1)(b-1)=ab-a+b-1=24$ e $b*a=(b+1)(a-1)=ab+a-b-1=30$. Somando estas duas expressões, obtemos $2ab-2=54$ e segue que $ab=28$. De modo análogo ao anterior, geramos as possibilidades (1,28), (2,14), (4,7), (7,4), (14,2) e (28,1) para (*a*,*b*) e verificamos que apenas $a=7$ e $b=4$ satisfazem $a*b=24$ e $b*a=30$.

Para aqueles que já sabem resolver equações de segundo grau, notamos que subtraindo $ab-a+b-1=24$ de $ab+a-b-1=30$ obtemos $2a-2b=6$, ou seja, $a-b=3$. Logo $a=b+3$ e, substituindo em $ab=28$ temos $b^2-3b-28=0$. Esta equação tem raízes $b=4$ e $b=-7$; como só nos interessa a raiz positiva, temos $b=4$ e então $a=7$.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA D
Primeiro observamos que quando o cachorro corre 10 metros o coelho corre 1 metro. Como o cachorro começou 10 metros atrás do coelho, neste momento o coelho está apenas 1 metro à frente. Quando o cachorro corre mais 1 metro, o coelho corre 10 cm, ou seja, o coelho ainda está 10 cm à frente. Finalmente, observamos que se o cachorro corresse mais 1 metro, o coelho correria somente mais 10 cm; logo, em algum momento antes disso, o cachorro alcança o coelho. Assim o coelho é alcançado depois de o cachorro correr 11 metros, mas antes que ele corra 12 metros.

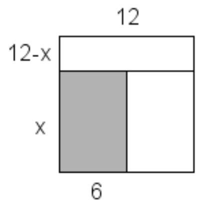
Algebricamente, podemos dizer que se o coelho corre com velocidade *v* m/s então o cachorro corre com velocidade $10v$ m/s. No instante $T=0$, o coelho está 10 metros à frente do cachorro; após *T* segundos, o cachorro correu $10Tv$ metros e o coelho Tv metros, ou seja, o coelho estará na posição $10+Tv$. O cachorro alcançará o coelho quando $10Tv=10+Tv$, ou seja, quando $Tv=\frac{10}{9}$. O cachorro terá então percorrido $10\times\frac{10}{9}=\frac{100}{9}=11{,}11\ldots$ metros, ou seja, entre 11 e 12 metros.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA B
Como os segmentos *AF* e *ED* apontam para o norte, eles são paralelos, e como *AB* é transversal a *AF* e a *ED* segue que $D\hat{B}A=F\hat{A}B=18^\circ$. Logo $A\hat{B}C=180^\circ-(44^\circ+18^\circ)=118^\circ$. Como $AB=BC$, o triângulo *ABC* é isósceles; os ângulos iguais $A\hat{C}B$ e $C\hat{A}B$ medem então $\frac{1}{2}(180^\circ-118^\circ)=31^\circ$. Concluímos então que $F\hat{A}C=B\hat{A}C-B\hat{A}F=31^\circ-18^\circ=13^\circ$.



QUESTÃO 9
ALTERNATIVA B
Temos $2^{100}\times5^{103}=2^{100}\times5^{100}\times5^3=(2\times5)^{100}\times5^3=125\times10^{100}$, que é 125 seguido de 100 zeros. A soma dos algarismos deste número é $1+2+5=8$.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA D



Notamos primeiro que os dois retângulos da parte inferior da figura são congruentes, pois possuem o mesmo perímetro e a mesma altura; logo suas bases medem 6 cm. Chamando de *x* a altura destes retângulos, podemos marcar as medidas como na figura ao lado. O perímetro do retângulo da parte superior da figura é $2\times[12+(12-x)]=48-2x$ e o perímetro do retângulo sombreado é $2\times(6+x)=12+2x$. Como os perímetros são iguais, temos $48-2x=12+2x$, donde $4x=36$ e então $x=9$. Logo a área do retângulo sombreado é $6\times 9=54$ cm^2.

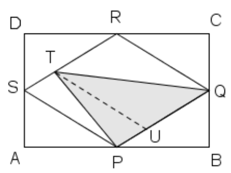
QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

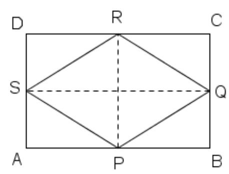
Vamos calcular mais alguns termos da sequência:

$$\underbrace{9,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ 14,\ 11,\ 8,\ 15,\ 2}_{10\text{ termos}},\ 9,\ 16,\ 13,\ \ldots$$

Observamos que a sequência se repete de 10 em 10 termos. Como $2009=200\times 10+9$, segue que o 2009º termo da sequência é 15.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A





A figura à direita mostra como decompor o retângulo *ABCD* em oito triângulos congruentes. Concluímos que a área do quadrilátero *PQRS* é metade da área do retângulo, ou seja, 20 cm^2.

Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela *TU* ao segmento *PS*. Os triângulos *PST* e *UTP* são congruentes, bem como os triângulos *UTQ* e *RQT*. Como o triângulo *PQT* é a união dos triângulos *UTP* e *UTQ*, segue que sua área é metade da área do quadrilátero *PQRS*, ou seja, 10 cm^2.

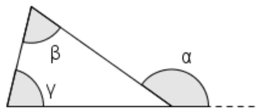
QUESTÃO 13
ALTERNATIVA B

Um número com uma determinada quantidade de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de zero, é sempre maior que qualquer número que tenha um algarismo a menos. Por exemplo, 1000 (com quatro algarismos) é maior do que 999 (que tem apenas 3 algarismos). Assim, com exatamente 13 palitos, devemos formar um número que tenha a maior quantidade possível de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de 0. Como o 1 é formado pelo menor número de palitos entre todos os algarismos, vemos que para obter o maior número possível com 13 palitos devemos usar tantos algarismos 1 quanto possível.

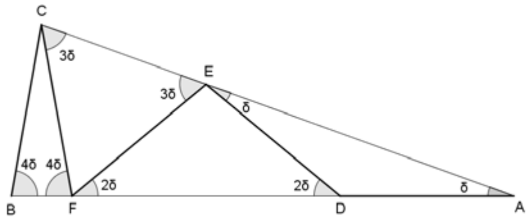
Não é possível usar 6 algarismos 1, pois neste caso já teríamos usado 12 palitos e não há algarismo que possa ser formado com apenas 1 palito. Pelo mesmo motivo, não é possível usar 5 algarismos 1; não há algarismo formado por 3 palitos. Mas é possível usar 4 algarismos 1; neste caso, usamos 8 palitos e podemos completar o número com um entre os algarismos 2 ou 5, que são formados por 5 palitos. Neste caso, devemos escolher o 5, que nos permite formar o número 51111 com 13 palitos. A soma dos algarismos deste número é $5+1+1+1+1=9$.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA B

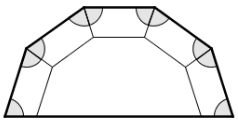
Temos $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}=\dfrac{29}{30}$. Como a fração $\dfrac{29}{30}$ é irredutível, segue que bd é um múltiplo de 30. Por outro lado, o único múltiplo de 30 que é o produto de dois fatores entre 1 e 9 é o próprio 30, que é igual a 5×6. Podemos então supor que $b=5$ e $d=6$; voltando à expressão original, obtemos $6a+5b=29$. A única solução desta equação em inteiros entre 1 e 9 é $a=4$ e $b=1$, e temos $a+b+c+d=4+5+1+6=16$.



QUESTÃO 15
ALTERNATIVA C
Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado está ilustrado na figura ao lado e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.



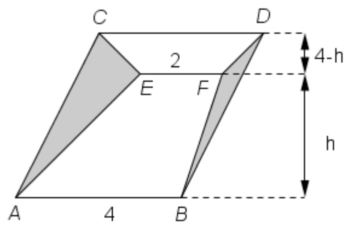
Vamos indicar por δ a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo *ADE* é isósceles, temos $D\hat{E}A = \delta$. O ângulo $E\hat{D}F$ é externo ao triângulo *ADE*, e pelo resultado mencionado acima temos $E\hat{D}F = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo *DEF* é isósceles temos também $E\hat{F}D = 2\delta$; o ângulo $F\hat{E}C$, externo ao triângulo *FEA*, mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $C\hat{B}A = 4\delta$, e como o triângulo *ABC* é isósceles segue que $B\hat{C}A = 4\delta$. Logo $180^\circ = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta = 20^\circ$.



QUESTÃO 16
ALTERNATIVA A
Lembramos que a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é $(n-2)\times 180^\circ$. Podemos ver a figura do enunciado como um polígono de 6 lados (em traço mais grosso na figura ao lado); a soma de seus ângulos internos é então $(6-2)\times 180^\circ = 720^\circ$. Por outro lado, como os trapézios são congruentes, a soma destes ângulos internos é igual a 10 vezes a medida do ângulo marcado, que vale então $\dfrac{720^\circ}{10} = 72^\circ$.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA D
Há cinco algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9. Contando apenas números inteiros positivos, existem então 5 números formados por apenas um algarismo ímpar, $5\times 5 = 25$ números formados por dois algarismos ímpares e $5\times 5\times 5 = 125$ números formados por três algarismos ímpares. Assim, existem $5 + 25 + 125 = 155$ números inteiros positivos menores que 1000 formados por algarismos ímpares. O 156º é então 1111 e o 157º é 1113.

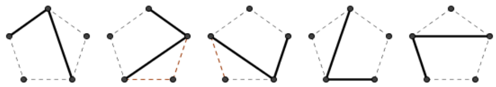
QUESTÃO 18
ALTERNATIVA B



Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo *ABCD* e subtrair as áreas dos trapézios *ABFE* e *CDFE*. Seja *h* a altura do trapézio *ABFE*; sua área é então $\dfrac{AB+EF}{2}h = 3h$ cm². Como a altura do paralelogramo *ABCD* é 4 cm, a altura do trapézio *CDFE* é $4-h$ e sua área é $\dfrac{CD+EF}{2}(4-h) = 12-3h$ cm². A área do paralelogramo *ABCD* é 16 cm²; a soma das áreas dos triângulos é então $16-(3h+12-3h) = 4$ cm².

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA E
Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.

Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.



Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA E
Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.