3ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2007
Somando novos talentos para o Brasil

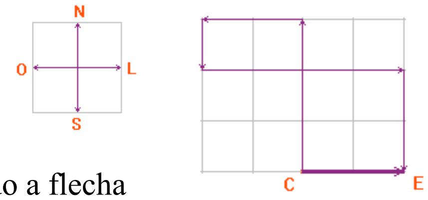
Soluções

Nível 2

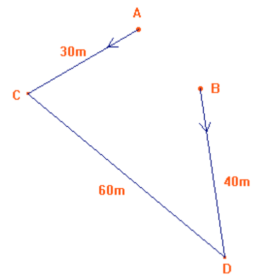
7ª e 8ª séries (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental

---

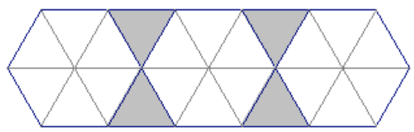
1. (alternativa A) No diagrama ao lado cada quadradinho tem 1 km de lado e o ponto *C* indica a casa de Carlos. Representando o trajeto descrito no enunciado pelas flechas em traço fino, vemos que a escola de Carlos está localizada no ponto *E*. Desse modo a flecha *CE*, mais grossa, representa o caminho que o Carlos tem que fazer para ir à escola em linha reta. Logo a escola fica 2 km a leste da casa de Carlos.



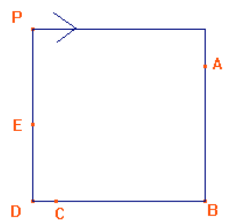
2. (alternativa C) As duas formiguinhas ficarão de frente uma para a outra no momento em que ambas estiverem no segmento *CD*. Como ambas andam com a mesma velocidade, quando a formiguinha que partiu de *B* chegar ao ponto *D* a outra já terá passado de *C* e andado mais 10 metros. Nesse momento a distância entre elas será de $60-10=50$ metros.



3. (alternativa C) A faixa pode ser decomposta em 22 triângulos equiláteros congruentes aos triângulos sombreados, como mostra a figura. Logo, a área da parte sombreada é $\frac{4}{22}$ da área total, ou seja, $\frac{4}{22}\times 154 = 28\ \text{cm}^2$.



4. (alternativa C) Quatro voltas na praça correspondem a um total de $4\times 4=16$ lados do quadrado. Sueli caiu quando atingiu $\frac{3}{7}$ desse percurso, ou seja, quando tinha percorrido $\frac{3}{7}\times 16=\frac{48}{7}=6+\frac{6}{7}$ lados. Olhando para a figura, vemos que percorrer 6 lados levou a Sueli ao ponto *B*; como $\frac{6}{7}$ é menor que 1, ela não chegou ao ponto *D*. Logo ela só pode ter caído no ponto *C*.



5. (alternativa C) Vamos usar o símbolo $\approx$ para indicar "aproximadamente igual a"; ou seja, $x\approx y$ quer dizer que *x* é aproximadamente igual a *y*. Por exemplo, $0{,}99\approx 1$, $\sqrt{401}\approx 20$ e $60{,}12\approx 60$. Em geral, se em uma operação aritmética trocamos os números envolvidos por outros aproximadamente iguais a eles, o resultado da operação deve ser uma aproximação do que teríamos obtido com os números originais. No nosso caso

$$\frac{60{,}12\times(0{,}99)^2}{\sqrt{401}}\approx\frac{60\times 1^2}{20}=3$$

6. (alternativa A) Vamos investigar as alternativas uma a uma. Como n é negativo, temos:

a) $-3n = (-3)n$ é positivo pois é o produto de dois números negativos;

b) $3n$ é negativo pois é o produto de um número positivo e um negativo;

c) $n-3 = n+(-3)$ é negativo pois é a soma de dois números negativos;

d) $9n-3 = 9n+(-3)$ é negativo pois é a soma de dois números negativos; notamos que $9n$ é negativo pois é o produto de um número positivo e outro negativo;

e) $n-9$ é negativo, como no item (c).

Como um número positivo é maior que qualquer número negativo, vemos que o maior dos números acima é $-3n$.

7. (alternativa D) Na figura I mostramos o retângulo antes de ser cortado e, na figura II, o modo como as peças se encaixam para formar o quadrado.

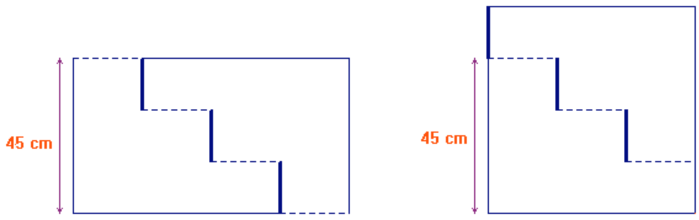


Figura I Figura II

O encaixe mostra que os segmentos pontilhados são todos iguais, assim como os segmentos em traço mais grosso. Observando a figura I, vemos então que

3×(comprimento de um segmento em traço grosso) = 45 cm,

donde o comprimento de um desses segmentos é $45 \div 3 = 15$ cm. Da figura II temos

lado do quadrado = 45 + comprimento do segmento em traço grosso = 60 cm.

Por outro lado, ainda observando a figura II, vemos que

3×(comprimento de um segmento pontilhado) = 60 cm,

donde o comprimento de um desses segmentos é $60 \div 3 = 20$ cm. Finalmente, voltando à figura I, temos

4×(comprimento de um segmento em traço grosso) = base do retângulo,

e segue que a base do retângulo mede $4 \times 20 = 80$ cm.

8. (alternativa D) As instruções dizem que ovos e creme não podem estar juntos no bolo, bem como leite e laranja; isso elimina as opções (B), (C) e (E). Elas dizem também que um bolo sem creme não pode ter leite, o que elimina a opção (A).

9. (alternativa D) A primeira etapa da viagem do José só pode ter sido C→E ou E→C, pois $4+9=13$ é o único modo de percorrer 13 km entre cidades nessa estrada. Como todas as cidades distam de C menos que 21 km, o percurso inicial foi C→E. Percorrendo 21 km a partir de E levou José à cidade A e mais 12 km o levam à cidade D, que é onde mora sua mãe.

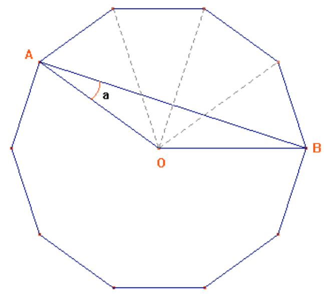
10. (alternativa A) Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então seu peso é cinco vezes o preço da outra; isto equivale a dizer que se uma turmalina pesa a metade de outra, então seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividi-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2 também iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma de valor $\frac{1000}{5}=200$ reais. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo $\frac{200}{5}=40$ reais; essas 4 turmalinas juntas valem $4\times 40=160$ reais.

Podemos esquematizar a solução da seguinte forma, mostrando como calcular o preço de uma das quatro turmalinas menores:

$$\underbrace{\text{peso inicial}}_{\text{valor: }1000} \xrightarrow[valor\div 5]{peso\div 2} \underbrace{\frac{1}{2}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: }1000\div 5=200} \xrightarrow[valor\div 5]{peso\div 2} \underbrace{\frac{1}{4}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: }200\div 5=40}$$

11. (alternativa C) Os números ímpares são da forma $2n-1$ onde n é um número natural positivo; por exemplo, $1=2\times 1-1$ é o primeiro número ímpar e $23=2\times 12-1$ é o 12º número ímpar. Como $47=2\times 24-1$, vemos que 47 é o 24º número ímpar, ou seja, Luís mora na 24ª casa a contar de uma extremidade da rua. Analogamente, temos $71=2\times 36-1$, ou seja, Luís mora na 36ª casa a contar da outra extremidade da rua. Ou seja: a partir de uma extremidade da rua há 23 casas antes da casa de Luís e a partir da outra há 35. No total, a rua tem $23+1+35=59$ casas; a parcela 1 nessa adição corresponde à casa do Luís.

12. (alternativa B) O triângulo AOB é isósceles pois os lados OA e OB são iguais. Logo, os ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ também são iguais, ou seja, ambos têm medida a. Notamos agora que o ângulo central $A\hat{O}B$ mede $\frac{4}{10}\times 360^\circ=144^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, segue que $2a+144^\circ=180^\circ$. Logo $a=\frac{180^\circ-144^\circ}{2}=\frac{36}{2}=18^\circ$.



13. (alternativa C) Ao lado vemos as figuras do enunciado da questão. A descrição das peças da figura I implica que os pontos M e N são pontos médios dos lados AB e AC. A figura III, onde P é o ponto médio de BC, mostra que a área do triângulo AMN é igual à quarta parte da área do triângulo ABC, que por sua vez tem área igual a metade da área do quadrado. Logo

$$área(AMN)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 40=5\text{ cm}^2.$$

A figura II mostra que o buraco consiste de três triângulos iguais ao triângulo AMN; logo sua área é 15 cm².

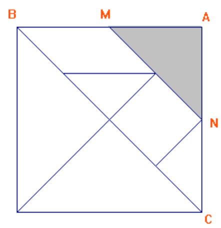


Figura I

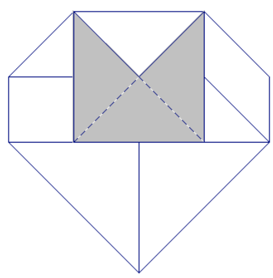


Figura II

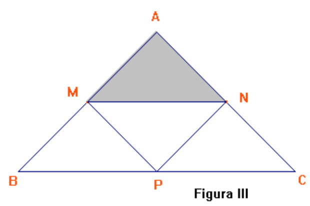
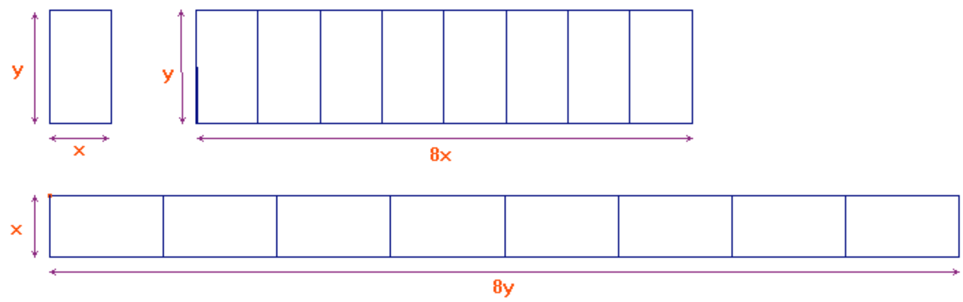


Figura III

14. (alternativa D) A figura mostra um cartão com suas dimensões em centímetros indicadas por *x* e *y*, bem como os retângulos que Juliana pode fazer.



Segue que $2(8x+y)=236$ cm e $2(x+8y)=376$ cm. Temos então $8x+y=118$, donde $y=118-8x$. Da segunda equação segue $x+8y=188$; substituindo o valor de y temos

$$x+8(118-8x)=x+944-64x=944-63x=188$$

Logo $63x=756$, donde $x=\frac{756}{63}=12$ cm e então $y=118-8x=118-96=22$ cm.

Logo a área do cartão é $12\times 22=264$ cm^2.

15. (alternativa E) Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

polígono	perímetro (em ℓ)	área (em ℓ^2)
I	20	$5\times 5=25$
II	20	$25-3=22$
III	30	$25-7=18$

Desse modo, a correspondência é I→(20,25), II→(20,22) e III→(30,18). Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro) logo estão na mesma vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo I→C e II→A; resta III→B.

16. (alternativa B) Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4\times 2\times 2=16$.

17. (alternativa E) A maior soma possível de nove algarismos acontece quando temos nove algarismos 9 e é $9 \times 9 = 81$. Como $79 = 81 - 2$, vemos que para que a soma de nove algarismos seja igual a 79 só há duas possibilidades

- sete algarismos 9 e dois algarismos 8;
- oito algarismos 9 e um algarismo 7.

No primeiro caso podemos formar vários números pares com soma dos algarismos igual a 79; por exemplo, 999 999 988 e 899 999 998. No segundo caso isso não é possível pois só temos algarismos ímpares.

18. (alternativa D) De acordo com a tabela, a turma tem $6 + 18 + 16 = 40$ alunos. Logo, a média aritmética das notas da turma é

$$M = \frac{\text{soma de todas as notas dos alunos da turma}}{40}.$$

Se todos os alunos tivessem tirado uma nota menor que a nota possível, isto é, que os alunos do primeiro grupo tivessem tirado 0, os do segundo 4 e os do terceiro 7, a média obtida seria menor que M. Logo

$$\frac{6 \times 0 + 18 \times 4 + 16 \times 7}{40} = 4{,}6 < M$$

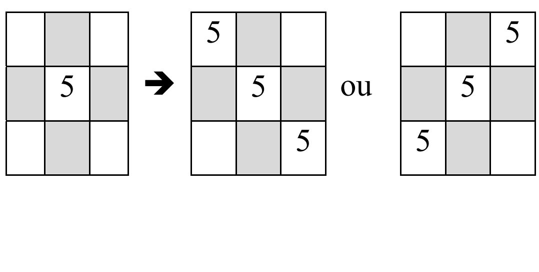
Por outro lado, M é menor ou igual que a média no caso em que todos os alunos tivessem tirado a maior nota possível, isto é, que os alunos do primeiro grupo tivessem tirado 4, os do segundo 7 e os do terceiro 10. Logo

$$M \leq \frac{6 \times 4 + 18 \times 7 + 16 \times 10}{40} = 7{,}75$$

Logo $4{,}6 < M \leq 7{,}75$; a única alternativa que satisfaz essa restrição é 4,9.

19. (alternativa C) Vamos denotar por x o outro número. Como os 3 números que aparecem em cada linha são todos diferentes, x é diferente de 5 e de 8. Como cada número aparece uma única vez em cada linha, segue que esses números aparecem, cada um, exatamente três vezes na tabela.

Notamos que o 5 não pode aparecer na casa central. De fato, se ele estivesse nessa casa então as casas em cinza da tabela abaixo não poderiam conter outro 5; como os números em cada linha são diferentes, a única possibilidade para os outros dois números 5 seria preencher uma das duas diagonais, o que não pode acontecer pois $5 + 5 + 5 = 15$ é ímpar.



Vamos então tentar o 8 na casa central. Analogamente, teremos que ter 8 em uma das diagonais:

	8	

➔

8		
	8	
		8

ou

		8
	8	
8		

Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:

8		
	8	
		8

➔

8	5	
	8	5
5		8

➔

8	5	x
x	8	5
5	x	8

ou

8		
	8	
		8

➔

8	x	
	8	x
x		8

➔

8	x	5
5	8	x
x	5	8

Para satisfazer todas as condições do problema, as somas nas diagonais devem ser iguais. Em ambas as formas acima isso leva a $24 = 5 + 8 + x = 13 + x$, donde $x = 11$ e os tabuleiros acima são

8	5	11
11	8	5
5	11	8

ou

8	11	5
5	8	11
11	5	8

A outra opção leva a um resultado análogo, e vemos que em qualquer caso a soma das diagonais é 24.

Resta ainda analisar o caso em que o x está na casa central. Como antes, devemos ter uma das duas diagonais preenchida com x:

	x	

➔

x		
	x	
		x

ou

		x
	x	
x		

Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:

x		
	x	
		x

➔

x	5	
	x	5
5		x

➔

x	5	8
8	x	5
5	8	x

ou

x		
	x	
		x

➔

x	8	
	x	8
8		x

➔

x	8	5
5	x	8
8	5	x

Ambas mostram que $3x = 5 + x + 8 = 13 + x$, donde $2x = 13$. A segunda opção leva à mesma equação; como ela não tem solução para x natural, concluímos que x não pode estar na casa central.

20. (alternativa A) Sejam x a distância da casa de João à de Maria, y a da casa de Maria ao cinema e z a da casa de João ao cinema quando ele toma o caminho que não passa pela casa da Maria. Se João vai ao cinema com a Maria, ele anda $x + y$, sendo que desse total ele anda $x = \frac{2}{3}(x + y)$ sozinho. Se ele vai ao cinema sozinho, ele anda $z = x + y - 1 = 2y$. De $x + y - 1 = 2y$ tiramos $x = y + 1$; substituindo na primeira equação obtemos $y + 1 = \frac{2}{3}(2y + 1)$, donde $y = 1$.