3ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2007
Somando novos talentos para o Brasil

# Soluções

## Nível 1

**5ª e 6ª séries (6º e 7º anos) do Ensino Fundamental**

**1. (alternativa C)** Os números $0,013$ e $0,119$ são menores que $0,12$. Por outro lado, $0,31$ e $0,7$ são maiores que $0,3$. Finalmente, $0,29$ é maior que $0,12$ e menor que $0,3$, donde a alternativa correta. A figura mostra esses números na reta numérica.


**2. (alternativa D)** Vamos calcular todos os valores, lembrando que:

- devemos calcular primeiro os valores das expressões dentro dos parênteses;
- as operações devem ser realizadas efetuando primeiro as multiplicações e divisões, depois as somas e subtrações;
- o resultado de uma multiplicação é 0 se um dos fatores é 0.

a) $(\underbrace{6+3}_{9})\times 0 = 9\times 0 = 0$

b) $6\times 3\times 0 = 0$

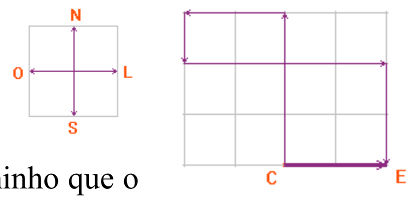
c) $6+\underbrace{3\times 0}_{0} = 6+0 = 6$

d) $6\times(\underbrace{3+0}_{3}) = 6\times 3 = 18$

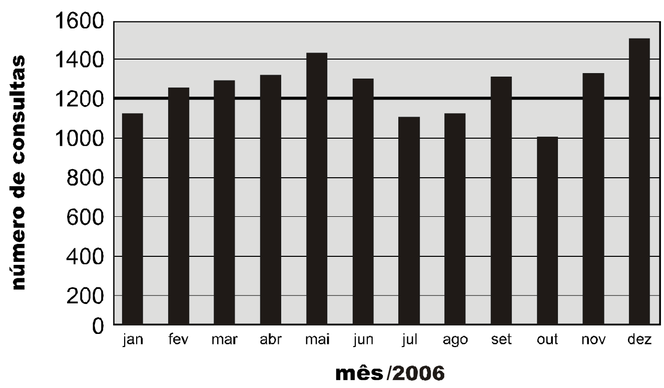
e) $6+3+0 = 9+0 = 9$

Logo o maior resultado é 18.

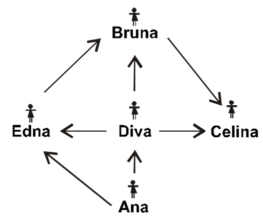
**3. (alternativa A)** No diagrama ao lado cada quadradinho tem 1 km de lado e o ponto $C$ indica a casa de Carlos. Representando o trajeto descrito no enunciado pelas flechas em traço fino, vemos que a escola de Carlos está localizada no ponto $E$. Desse modo a flecha $CE$, mais grossa, representa o caminho que o Carlos tem que fazer para ir à escola em linha reta. Logo a escola fica 2 km a leste da casa de Carlos.



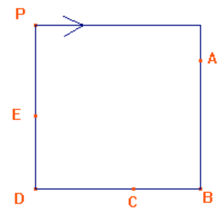

**4. (alternativa D)** Foram efetuadas mais de 1200 consultas nos meses cujas colunas no gráfico ultrapassam a marca de 1200. Esses meses são fevereiro, março, abril, maio, junho, setembro, novembro e dezembro, totalizando 8 meses.



**5. (alternativa C)** Como as flechas partem da irmã mais nova para a mais velha, a irmã mais velha é aquela que tem o nome do qual não partem (ou só chegam) flechas. Essa irmã é a Celina.

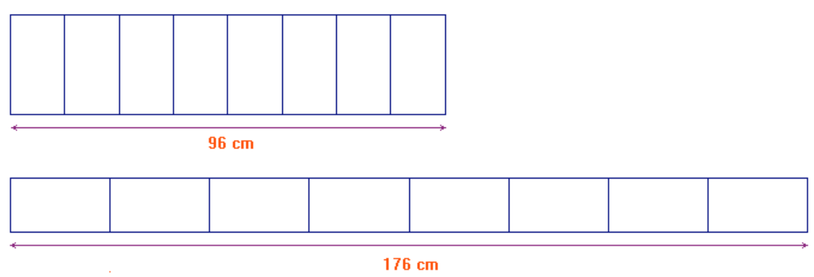



**6. (alternativa C)** Como Sueli quer dar uma volta completa, os pontos B e D correspondem, respectivamente, a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ do percurso. Como $\frac{3}{5}$ é maior do que $\frac{1}{2}$, vemos que Sueli percorreu mais da metade do caminho, e portanto ultrapassou o ponto B. Por outro lado, como $\frac{3}{5}$ é menor do que $\frac{3}{4}$, vemos que Sueli não chegou ao ponto D. Concluímos que ela caiu entre os pontos B e D, ou seja no ponto C.




Podemos também resolver esse problema como segue. O trajeto da Sueli consiste dos 4 lados do quadrado, logo ela caiu quando chegou a $\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5}$ de um lado. Como $\frac{12}{5}=\frac{10}{5}+\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5}$, vemos que Sueli caiu depois de percorrer 2 lados completos e mais $\frac{2}{5}$ de um lado. Com os 2 lados ela chegou ao ponto *B*, mas como $\frac{2}{5}$ é menor que 1 ela não chegou ao ponto D. Como antes, vemos que ela caiu no ponto C.

**7. (alternativa B)** Juliana pode enfileirar os cartões juntando-os pelo comprimento ou pela largura, como mostrado nas figuras.



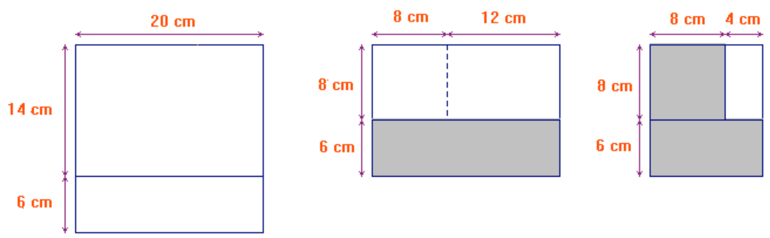

A primeira figura mostra que $8\times \text{largura}=96$ cm, donde a largura é $96\div 8=12$ cm; a segunda figura mostra que $8\times \text{comprimento}=176$ cm, donde o comprimento é $176\div 8=22$ cm. Portanto, o perímetro de cada cartão é $22+12+22+12=68$ cm.

**8. (alternativa E)** Estamos procurando um número natural que tenha exatamente sete múltiplos menores ou iguais a 36. É fácil ver que apenas o 5 satisfaz essa condição; ele tem exatamente 7 múltiplos menores do que 36, que são 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35.

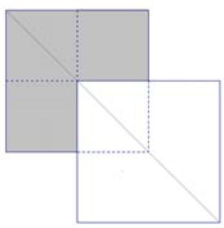
É importante notar que apenas o 5 satisfaz a condição do enunciado. Números menores que 5 têm mais que sete múltiplos menores que 36; por exemplo, 4 tem oito múltiplos entre 1 e 36, que são 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 . Por outro lado o 6 tem apenas cinco múltiplos entre 1 e 35, que são 6, 12, 18, 24 e 30.

**9. (alternativa E)** A maior soma possível de dez algarismos é $10 \times 9 = 90$, que ocorre quando temos 10 algarismos 9. Para que a soma seja 89, basta diminuir uma unidade de algum dos algarismos, ou seja, substituir um 9 por um 8. Logo o número tem nove algarismos 9 e um algarismo 8. Como ele é par, seu algarismo das unidades só pode ser o 8, ou seja, o número é $9\,999\,999\,998$.

**10. (alternativa B)** A figura ilustra a seqüência de dobras e as medidas dos segmentos determinados por elas. Após a 1ª dobra, a parte branca visível é um retângulo de 20 cm por 8 cm. Após dobrar a 2ª vez, a parte branca visível é um retângulo de 4 cm por 8 cm. A área desse retângulo é $4 \times 8 = 32\ \text{cm}^2$.




**11. (alternativa B)** A área de cada quadrado é $10 \times 10 = 100\ \text{cm}^2$. Na figura ao lado podemos ver que a área da parte sombreada é $\frac{3}{4}$ da área do quadrado, ou seja, é igual a $\frac{3}{4} \times 100 = 75\ \text{cm}^2$. A figura II do enunciado é formada por cinco figuras iguais a essa parte sombreada e mais um quadrado, logo sua área é $5 \times 75 + 100 = 475\ \text{cm}^2$.



**12. (alternativa D)** Em primeiro lugar, notamos que o relógio quadrado não pode estar atrasado, pois nesse caso a hora correta seria 7h13min e portanto o relógio redondo também estaria atrasado. Logo, o relógio que está atrasado é o redondo e a hora correta é 6h53min. Concluímos que o relógio quadrado está adiantado em $7\text{h}10\text{min} - 6\text{h}53\text{min} = 17\text{min}$.

**13. (alternativa B)** Vamos pensar que os nomes dos amigos são todos diferentes e que um deles fez uma lista onde anotou, noite por noite, os nomes dos vigias. Como o acampamento durou 6 noites e a cada noite 2 amigos ficaram de guarda, a lista teve um total de 12 nomes. Mas cada nome apareceu na lista exatamente 3 vezes, e então o número de nomes diferentes é $12 \div 3 = 4$. Logo havia 4 amigos no acampamento.

Devemos notar que com esses quatro amigos a situação descrita no enunciado é possível. Mostramos isso a seguir, chamando os amigos de A, B, C e D e fazendo uma possível lista dos turnos de vigia:

1ª noite: A e B  2ª noite: A e C
3ª noite: A e D  4ª noite: B e C
5ª noite: B e D  6ª noite: C e D

**14. (alternativa B)** Observamos que nas linhas ímpares só aparece a sigla OBMEP, que se repete de 5 em 5 colunas. Assim, em qualquer dessas linhas aparece um P na 1005ª posição, e logo aparece um B na 1007ª posição. Como 507 é ímpar, vemos que no cruzamento da 507ª linha com a 1007ª coluna aparece a letra B.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **…** | **1005** | **1006** | **1007** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | O | B | M | E | P | O | B | **…** | P | O | B |
| **2** | | | | | | | | **…** | | | |
| **3** | O | B | M | E | P | O | B | **…** | P | O | B |
| **4** | | | | | | | | **…** | | | |
| **5** | O | B | M | E | P | O | B | **…** | P | O | B |
| **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | ⋱ | **…** | **…** | **…** |
| **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** | ⋱ | **…** | **…** | **…** |
| **505** | O | B | M | E | P | O | B | **…** | P | O | B |
| **506** | | | | | | | | **…** | | | |
| **507** | O | B | M | E | P | O | B | **…** | P | O | B |

**15. (alternativa A)** O método direto aqui é simplesmente substituir todos os sinais das alternativas e decidir se a afirmativa obtida é verdadeira ou falsa. Vamos fazer isso:

a) substituindo ? por ÷ obtemos $\frac{3}{7} \div \frac{6}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{14}$, afirmativa verdadeira

b) substituindo ? por × obtemos $\frac{3}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{5}{14}$, afirmativa falsa

c) substituindo ? por + obtemos $\frac{3}{7} + \frac{6}{5} = \frac{5}{14}$, afirmativa falsa

d) substituindo ? por = obtemos $\frac{3}{7} = \frac{6}{5} = \frac{5}{14}$, afirmativa falsa

e) substituindo ? por − obtemos $\frac{3}{7} - \frac{6}{5} = \frac{5}{14}$, afirmativa falsa pois ao subtrair um número maior de um número menor não é possível obter um número maior que zero.

Podemos também resolver essa questão quase sem fazer contas:

| | |
|---|---|
| Como $\frac{6}{5}$ é maior do que 1, $\frac{3}{7}$ é menor do que 1 e $\frac{5}{14}$ maior do que zero, o sinal $-$ está excluído. | $\underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{menor que 1}} \;?\; \underbrace{\frac{6}{5}}_{\text{maior que 1}} = \underbrace{\frac{5}{14}}_{\text{maior que 0}}$ |
| Como $\frac{6}{5}$ é maior do que 1 e $\frac{3}{7}$ é menor do que 1, o sinal $=$ está excluído. | $\underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{menor que 1}} \;?\; \underbrace{\frac{6}{5}}_{\text{maior que 1}} = \frac{5}{14}$ |
| Como $\frac{3}{7}$ é maior que zero, $\frac{6}{5}$ é maior do que 1 e $\frac{5}{14}$ é menor do que 1, o sinal $+$ está excluído. | $\underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{maior que 0}} \;?\; \underbrace{\frac{6}{5}}_{\text{maior que 1}} = \underbrace{\frac{5}{14}}_{\text{menor que 1}}$ |
| Como $\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}=\frac{18}{35}$, $\frac{18}{35}$ é maior que $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{14}$ é menor que $\frac{1}{2}$, o sinal $\times$ está excluído. | $\frac{5}{14}<\frac{1}{2}<\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}=\frac{18}{35}$ |

Sobra então o sinal $\div$, que é correto como vimos acima.

**16. (alternativa D)** Na figura I mostramos o retângulo antes de ser cortado e, na figura II, o modo como as peças se encaixam para formar o quadrado.

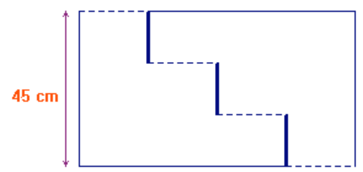



Figura I

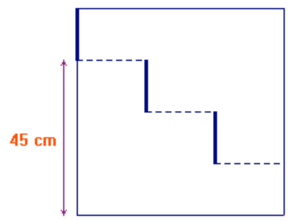



Figura II

O encaixe mostra que os segmentos pontilhados são todos iguais, assim como os segmentos em traço mais grosso. Observando a figura I, vemos então que

3×(comprimento de um segmento em traço grosso) = 45 cm,

donde o comprimento de um desses segmentos é $45\div 3=15$ cm. Da figura II temos

lado do quadrado = 45 + comprimento do segmento em traço grosso = 60 cm.

Por outro lado, ainda observando a figura II, vemos que

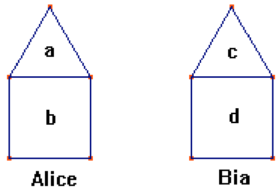
3×(comprimento de um segmento pontilhado) = 60 cm,

donde o comprimento de um desses segmentos é $60\div 3=20$ cm. Finalmente, voltando à figura I, temos

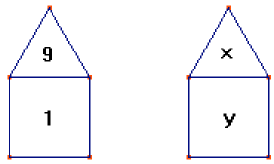
4×(comprimento de um segmento em traço pontilhado) = base do retângulo,

e segue que a base do retângulo mede $4\times 20=80$ cm.

**17. (alternativa E)** Vamos imaginar que Alice e Bia estão jogando esse jogo e que elas têm as cartas indicadas na figura. Nesse caso, o número de Alice é $a \times d$ e o de Bia é $b \times c$. Alice gostaria muito que *a* fosse 9, pois nesse caso seu número seria o maior possível; e ela também gostaria que *b* fosse 1, pois então o número de Bia seria o menor possível.




Esse raciocínio sugere que a carta com 9 no triângulo e 1 no quadrado ganha de todas as outras. Para mostrar isso, vamos comparar essa carta com outra com *x* no triângulo e *y* no quadrado; afirmamos que ela ganha, ou seja, que 9*y* é maior que *x*. De fato, 9*y* não pode ser menor que *x* pois *x* é no máximo 9; e 9*x* não pode ser igual a *x* pois nesse caso a única possibilidade é $x = 9$ e $y = 1$, contrariando o fato de que não há cartas repetidas no jogo.




**18. (alternativa A)** Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então seu peso é cinco vezes o preço da outra; isto equivale a dizer que se uma turmalina pesa a metade de outra, então seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividi-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2 também iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma de valor $\frac{1000}{5} = 200$ reais. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo $\frac{200}{5} = 40$ reais; essas 4 turmalinas juntas valem $4 \times 40 = 160$ reais.

Podemos esquematizar a solução da seguinte forma, mostrando como calcular o preço de uma das quatro turmalinas menores:

$$\underbrace{\text{peso inicial}}_{\text{valor: } 1000} \xrightarrow[valor \div 5]{peso \div 2} \underbrace{\frac{1}{2}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: } 1000\div 5=200} \xrightarrow[valor \div 5]{peso \div 2} \underbrace{\frac{1}{4}\text{ do peso inicial}}_{\text{valor: } 200\div 5=40}$$

**19. (alternativa B)** Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

**20. (alternativa C)** Vamos denotar por ✶ o outro número. Como os 3 números que aparecem em cada linha são todos diferentes, ✶ é diferente de 5 e de 8. Como cada número aparece uma única vez em cada linha, segue que esses números aparecem, cada um, exatamente três vezes na tabela.

Notamos que o 5 não pode aparecer na casa central. De fato, se ele estivesse nessa casa então as casas em cinza da tabela abaixo não poderiam conter outro 5; como os números em cada linha são diferentes, a única possibilidade para os outros dois números 5 seria preencher uma das duas diagonais, o que não pode acontecer pois $5+5+5=15$ é ímpar.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 5 | |
| | | |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 5 | | |
| | 5 | |
| | | 5 |

ou

| | | |
|---|---|---|
| | | 5 |
| | 5 | |
| 5 | | |

Vamos então tentar o 8 na casa central. Analogamente, teremos que ter 8 em uma das diagonais:

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 8 | |
| | | |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | 8 | |
| | | 8 |

ou

| | | |
|---|---|---|
| | | 8 |
| | 8 | |
| 8 | | |

Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | 8 | |
| | | 8 |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | |
| | 8 | 5 |
| 5 | | 8 |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | ✶ |
| ✶ | 8 | 5 |
| 5 | ✶ | 8 |

ou

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | 8 | |
| | | 8 |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 8 | ✶ | |
| | 8 | ✶ |
| ✶ | | 8 |

➔

| | | |
|---|---|---|
| 8 | ✶ | 5 |
| 5 | 8 | ✶ |
| ✶ | 5 | 8 |

Para satisfazer todas as condições do problema, as somas nas diagonais devem ser iguais. Em ambas as formas acima isso leva a ✶+5+8 = 24, donde ✶ = 11 e os tabuleiros acima são

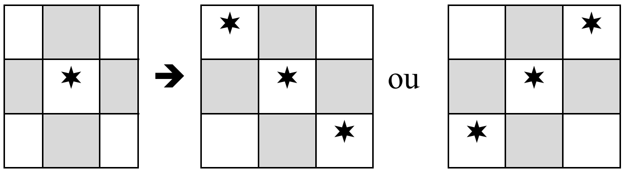
| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 11 |
| 11 | 8 | 5 |
| 5 | 11 | 8 |

ou

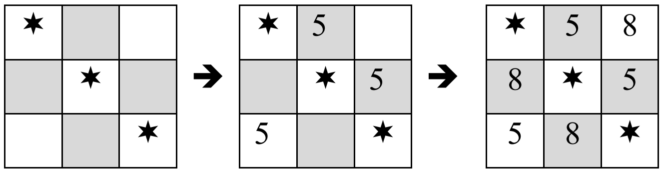
| | | |
|---|---|---|
| 8 | 11 | 5 |
| 5 | 8 | 11 |
| 11 | 5 | 8 |

A outra opção leva a um resultado análogo, e vemos que em qualquer caso a soma das diagonais é 24.

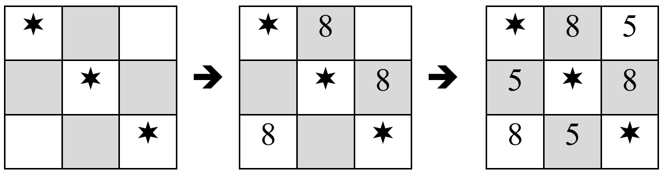
Resta ainda analisar a possibilidade de ✶ estar na casa central. Como antes, devemos ter uma das duas diagonais preenchida com ✶:



Escolhendo a primeira opção, podemos preencher o tabuleiro das seguintes formas:



ou



Ambas mostram que 3×✶ = 5 + 8 + ✶ é um número par. Mas isso é impossível; se 3×✶ é par então ✶ é par, mas então 5 + 8 + ✶ é ímpar. A segunda opção é análoga, e concluímos que ✶ não pode estar na casa central.