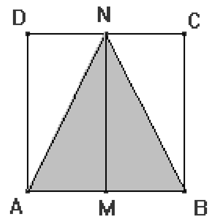
2ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2006
Somando novos talentos para o Brasil

Soluções do Nível 1 (5ª e 6ª série do Ensino Fundamental) – 1ª Fase

1. (alternativa C)
$99 + 999 + 9\,999 = (100 - 1) + (1\,000 - 1) + (10\,000 - 1) = 11\,100 - 3 = 11\,097.$

2. (alternativa D)
A balança mostra que o peso de Aninha com um mês de idade é de 4,1 quilos, ou seja, 4100 gramas. Aninha nasceu com 3250 gramas, logo ela engordou $4100 - 3250 = 850$ gramas em seu primeiro mês de vida.
Comentário: usamos aqui a palavra “peso” em lugar de “massa” devido a seu emprego coloquial.

3. (alternativa E)



Na opção `I` o quadrado está dividido em quatro triângulos iguais, de modo que a área da região sombreada é a metade da área do quadrado. Na opção `II`, a diagonal divide o quadrado em dois triângulos iguais, e outra vez a área da região sombreada é metade da área do quadrado. Na opção `III` o triângulo sombreado tem área menor do que o triângulo sombreado da opção `II`, ou seja, menor que metade da área do quadrado. Na opção `IV`, observamos na figura ao lado que a perpendicular *MN* ao segmento *AB* divide o quadrado nos pares de triângulos iguais *AMN, ADN* e *BMN, BCN*; segue mais uma vez que a área da região sombreada é metade da área do quadrado. Finalmente, a área do triângulo sombreado na opção `V` é maior do que a área do triângulo sombreado da opção `II`, ou seja, é maior do que metade da área do quadrado.
Comentário: observamos que na opção `IV` o ponto *N* não precisa ser o ponto médio do lado *CD*. De fato, o argumento usado acima para analisar essa opção não depende da posição de *N* ao longo de *CD*.

4. (alternativa A)
Solução 1: Na figura vê-se que V está abaixo de R, que está abaixo de S, que está abaixo de U, que está abaixo de T. Logo a ordem em que os discos foram colocados sobre a mesa é V, R, S, U, T.
Solução 2: T está acima de U, que por sua vez está acima de S e V. Como R está abaixo de S e acima de V vê-se que S foi colocado na mesa depois de V e R, e chegamos à mesma solução anterior.

5. (alternativa C)
Temos $9\,870 \times 1{,}54 = 987 \times 10 \times \dfrac{154}{100} = \dfrac{987 \times 154}{10} = \dfrac{15\,1998}{10} = 15\,199{,}8$.

6. (alternativa B)
Solução 1: Se Pedro não tivesse trocado os preços, a quantia que ele teria recebido pela venda de 100 quilos de cenoura e 120 quilos de tomate seria $100 \times 1 + 120 \times 1{,}10 = 100 + 132 = 232$ reais. A quantia que ele recebeu, de fato, foi de $100 \times 1{,}10 + 120 \times 1 = 110 + 120 = 230$ reais. Logo, por causa de sua distração, ele perdeu $232 - 230 = 2$ reais.
Solução 2: Como a diferença dos preços dos dois produtos é R$ 0,10 por quilo, ao trocar os preços Pedro ganhou $100 \times 0{,}10 = 10$ reais na venda das cenouras e perdeu $120 \times 0{,}10 = 12$ reais na venda dos tomates. Logo, no final, ele perdeu 2 reais.

7. (alternativa E)
Os casais 1 e 2 podem se sentar de duas maneiras distintas:

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 1}}_{\text{direita}}$$

No primeiro caso, as quatro pessoas podem se sentar em 4 ordens:

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \begin{cases} \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}}, \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}}, \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}}, \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}}, \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \end{cases}$$

No segundo caso, obtemos da mesma maneira outras 4 ordens. Logo os casais podem se sentar no banco de $4+4=8$ maneiras distintas.

8. (alternativa D)
Um quadrado de lado ℓ tem área ℓ^2. Os lados dos quadrados de áreas 25 cm^2 e 9 cm^2 medem respectivamente, 5 cm e 3 cm. Segue que o lado do quadrado menor mede $5-3=2$ cm. O contorno da figura é formado por 3 lados de 5 cm, 2 lados de 3 cm, 2 lados de 2 cm e um segmento que é a diferença entre um lado de 3 cm e outro de 2 cm, donde o perímetro é $3\times 5+2\times 3+2\times 2+(3-2)=26$ cm.

9. (alternativa D)
Para encontrar a expressão que a professora escreveu no quadro negro, precisamos destrocar tudo o que Carlos trocou:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (& 1 & 3 & \div & 5 &) & \times & (& 5 & 3 & + & 2 &) & - & 2 & 5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \downarrow \\ (& 1 & 5 & \div & 3 &) & + & (& 3 & 5 & \times & 2 &) & - & 2 & 3 \end{array}$$

Logo o resultado da expressão que professora escreveu no quadro negro é $(15\div 3)+(35\times 2)-23=5+70-23=52$.

10. (alternativa D)
Uma maneira de iniciar o preenchimento da tabela é

	2		1
1		2	
2			3
x	4	1	

Na casa marcada com **x** só pode ser colocado o 3

$\rightarrow$

y	2		1
1		2	
2			3
3	4	1	**z**

Na casa marcada com **y** só pode ser colocado o 4 e na marcada com **z** o 2

$\rightarrow$

4	2		1
1		2	
2			3
3	4	1	2

Agora é fácil completar a tabela

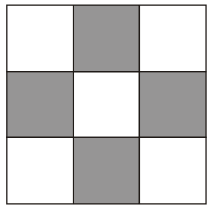
O resultado final é

4	2	3	1
1	**3**	2	4
2	1	**4**	3
3	4	1	**2**

e a soma procurada é $4+3+4+2=13$.

11. (alternativa C)
Como o resultado da multiplicação é um número de três algarismos, então ☐ só pode representar 1, 2 ou 3. Logo não "vai 1" quando multiplicamos ☐ (multiplicador) por ☐ (algarismo das unidades do multiplicando) e assim $\square \times 2 = 6$, donde $\square = 3$ e $\Delta = 9$. Portanto $\square \times \Delta = 27$.

12. (alternativa A)
Para montar o quadrado maior, a peça de um quadradinho não poderá ocupar nenhuma das quatro casas sombreadas na figura ao lado. Logo César só pode ter escrito nessa peça os seguintes números: 12, 25, 14, 20 ou 16.



Examinemos agora cada uma das opções:
(A) todos esses números são maiores que 9
(B) nenhum desses números é menor que 11
(C) nenhum desses números é maior que 27
(D) nenhum desses números é par menor que 10
(E) nenhum desses números está entre 21 e 24
donde temos a opção correta.

13. (alternativa A)
As informações do gráfico são dadas nas três primeiras colunas da tabela abaixo:

Cidade	População em 1990	População em 2000	Aumento da população	Aumento proporcional da população
I	30	50	$50 - 30 = 20$	$\frac{20}{30}$
II	60	50	decresceu	não teve
III	70	70	$70 - 70 = 0$	0
IV	100	150	$150 - 100 = 50$	$\frac{50}{100}$
V	120	130	$130 - 120 = 10$	$\frac{10}{120}$

Como $\frac{20}{30}$ é maior que $\frac{50}{100}$ e $\frac{10}{120}$. Concluímos que o maior aumento percentual de população entre 1990 e 2000 ocorreu na cidade I.

Na forma percentual, $\frac{20}{30} \approx 67\%$, $\frac{50}{100} = 50\%$ e $\frac{10}{120} \approx 8{,}3\%$.

14. (alternativa D)
A região sombreada é formada pelo quadrado central, quatro retângulos cada um com metade da área de um quadrado e quatro triângulos cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo a área da região sombreada é $1 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = 3{,}5\ \text{cm}^2$.

15. (alternativa D)
Inicialmente o fabricante cobrava R$ 20,00 por quilo e passou, com o aumento de preço, a cobrar R$ 25,00 por quilo. Logo o aumento do preço foi de R$ 5,00 por quilo e o aumento percentual de $\frac{5}{20} = 25\%$.

Soluções do Nível 1 (5ª e 6ª série do Ensino Fundamental) – 1ª Fase

16. (alternativa D)

Solução 1: Cada vez que se passa uma bola branca da caixa quadrada para a redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas na caixa quadrada diminui de 1; já na caixa redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas aumenta de 1.

Número de bolas brancas passadas da caixa quadrada para a redonda	0	1	2	3	4
Caixa quadrada: $\dfrac{\textbf{bolas brancas}}{\textbf{total de bolas}}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$
Caixa redonda: $\dfrac{\textbf{bolas brancas}}{\textbf{total de bolas}}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$

Como $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$, Paula terá que passar 3 bolas brancas da caixa quadrada para a redonda.

Solução 2: Seja x o número de bolas brancas que Paula deve transferir da caixa quadrada para a caixa redonda. Então

$$\frac{4-x}{6-x}=\frac{x}{6+x}$$

e resolvendo esta equação obtemos $x=3$.

17. (alternativa C)

Ao montar o cubo, a face branca e a face cinza ficam opostas; logo as alternativas (A) e (B) estão excluídas. As alternativas (D) e (E) estão excluídas pois no cubo não podem aparecer um retângulo branco e outro cinza com um lado menor em comum.

18. (alternativa D)

Como queremos obter a soma 54, devemos colocar sinais de adição entre todos os algarismos a partir do 5, isto é, $1\,?\,2\,?\,3\,?\,4\,?\,5+\underbrace{6+7+8+9}_{30}=54$. Logo precisamos que $1\,?\,2\,?\,3\,?\,4\,?\,5=24$.

Com o mesmo argumento usado anteriormente, vemos que isso só pode ser feito como $12+3+4+5$. Logo $12+3+4+5+6+7+8+9=54$ é a expressão procurada, para a qual necessitamos de 7 sinais de adição.

19. (alternativa C)

Como $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$, a soma de duas faces opostas em cada cubo é $78\div 6=13$. Logo, no cubo à direita, a face oposta à face 3 é a face 10, que é então uma das faces coladas. Falta descobrir qual a face do outro cubo que foi colada . Como é uma face par, só pode ser 6, 8 ou 12, porque já sabemos onde estão as faces 2, 4 e 10. Olhando para o cubo da esquerda vemos que a face 1 é oposta à face 12 e a face 5 oposta à face 8. Logo, nesse cubo, a face colada foi a 6. Portanto a resposta é $6\times 10=60$.

20. (alternativa E)

Como $950+550=1500=2\times 750$, uma solução é café na xícara I, suco na II, café na III, leite na IV e na V. Nessa solução temos apenas uma xícara com suco.

Será que existe outra solução com suco em duas xícaras? Se sim, teríamos duas possibilidades para a quantidade de suco:

i. $475+325=800$**ml (suco nas duas xícaras menores)** Nesse caso teríamos 1600 ml de café o que é impossível obter com 1 ou 2 xícaras dentre as I, II e III

ou

ii. **maior do que 800 ml**; nesse caso a quantidade de café seria maior que $800\times 2=1600$ ml, o que só pode ocorrer com café nas xícaras I e II, que somam $950+750=1700$ ml. Neste caso a quantidade de suco seria 850 ml, o que não pode ocorrer com as demais xícaras.

Logo há suco em apenas uma xícara, donde a única solução possível é a dada acima.