

N3Q1

- a) Quando o visor mostra 804, o número de controle é $10 + 8 - 0 + 4 = 22$.
- b) Quando o visor mostra 690, o número de controle é $10 + 6 - 9 + 0 = 7$. Mostramos na tabela abaixo todas as possibilidades de giro de uma unidade dos discos **C** e **U**:

	C	D	U	controle
Posição inicial	6	9	0	7
C gira para 7	7	0	0	17
C gira para 5	5	8	0	7
U gira para 1	6	0	1	17
U gira para 9	6	8	9	17

Como o número de controle não mudou, vemos que o disco **C** foi girado para 5 e o número no visor passou a ser 580.

- c) Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco **C** para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$. O mesmo acontecerá com o disco **D**; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco **U** continuará a mostrar **U**, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então

$$10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D).$$

Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo.

Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos **C** e **U**.

- d) Quando o visor mostra 978, o número de controle é $10 + 9 - 7 + 8 = 20$; o item anterior mostra que, qualquer que seja o giro dos discos **C** e **U**, o algarismo das unidades do número de controle continuará a ser 0. Como o número de controle de 555 é $10 + 5 - 5 + 5 = 15$, não é possível obter 555 a partir de 978.

N3Q2

a) De acordo com a definição, temos $2 \boxplus 3 = (2 + 3) + 1 = 6$.

b) Temos

$$0 \boxplus 3 = 0 \boxplus (1 \boxplus 1) = (0 \boxplus 1) \boxplus (0 \boxplus 1) = 3 \boxplus 3 = (3 + 3) + 1 = 7$$

onde observamos que $0 \boxplus 1 = 3$, de acordo com a conta de Hipácia no quadro negro.

c) Primeiro calculamos

$$2 \boxplus 3 = (0 \boxplus 1) \boxplus 3 = (0 \boxplus 3) \boxplus (1 \boxplus 3) = 7 \boxplus (1 \boxplus 3)$$

Para continuar, é necessário calcular $1 \boxplus 3$, o que fazemos a seguir:

$$1 \boxplus 3 = (0 \boxplus 0) \boxplus 3 = (0 \boxplus 3) \boxplus (0 \boxplus 3) = 7 \boxplus 7 = (7 + 7) + 1 = 15$$

Finalmente, temos

$$2 \boxplus 3 = 7 \boxplus (1 \boxplus 3) = 7 \boxplus 15 = (7 + 15) + 1 = 23.$$

Observação: O(a) leitor(a) com algum conhecimento de indução matemática pode mostrar que, em geral, $m \boxplus n = 2(m + n + mn) + 1$.

N3Q3

- a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.
- b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

- c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:
- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
 - se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
 - se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
 - se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

- d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

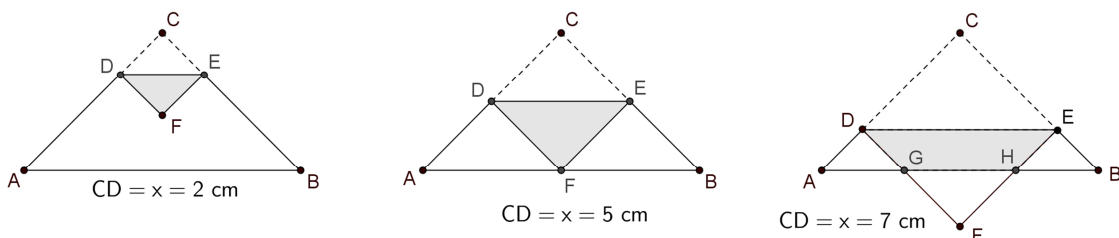
Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é

$$\frac{2^9}{2} = 2^8.$$

N3Q4

Para simplificar a exposição, vamos indicar a área de uma figura colocando seu nome entre parêntesis; por exemplo, (ABC) denota a área do triângulo ABC (em cm^2).

- a) A figura abaixo ilustra as situações $x=2$, $x=5$ e $x=7$; nelas F representa a posição de C após a dobra.



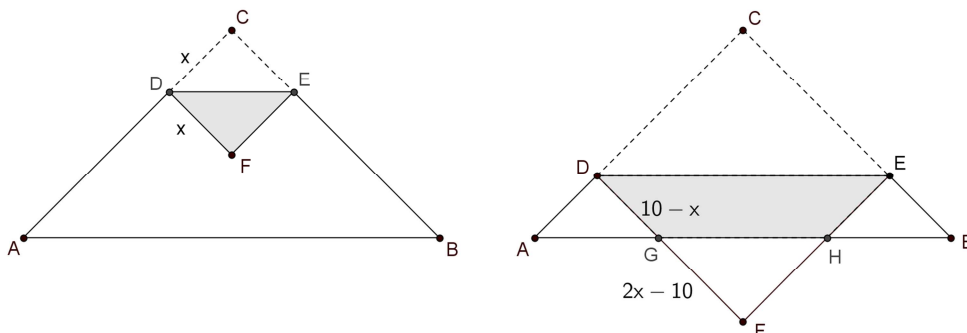
Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB , segue que $CDFE$ é um quadrado de lado $CD = x$ cm; a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado $CDFE$. Temos $(CDFE) = x^2$ e então $(DEF) = \frac{x^2}{2}$.

Para $x=2$ o triângulo DEF representa a região de sobreposição, logo,
 $f(2) = \frac{2^2}{2} = 2$; analogamente, temos $f(5) = \frac{25}{2}$.

No caso $x=7$, a área de sobreposição, representada pelo trapézio $DEHG$, é igual a $(DEF) - (GHF)$. O triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 3$ cm; como

$DF = 7$ temos $GF = 4$. Logo $(DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{7^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{33}{2} \text{ cm}^2$, ou seja,
 $f(7) = \frac{33}{2}$.

- b) A figura abaixo, à esquerda, ilustra a região de sobreposição para $0 < x \leq 5$; à direita temos a região de sobreposição para $5 < x < 10$.



No primeiro caso, $CDFE$ é um quadrado de lado x e a área de DEF é metade da área desse quadrado, ou seja, $f(x) = \frac{x^2}{2}$. No segundo caso, o triângulo ADG é

isósceles com $AD = DG = 10 - x$; logo $GF = DF - DG = x - (10 - x) = 2x - 10$ e

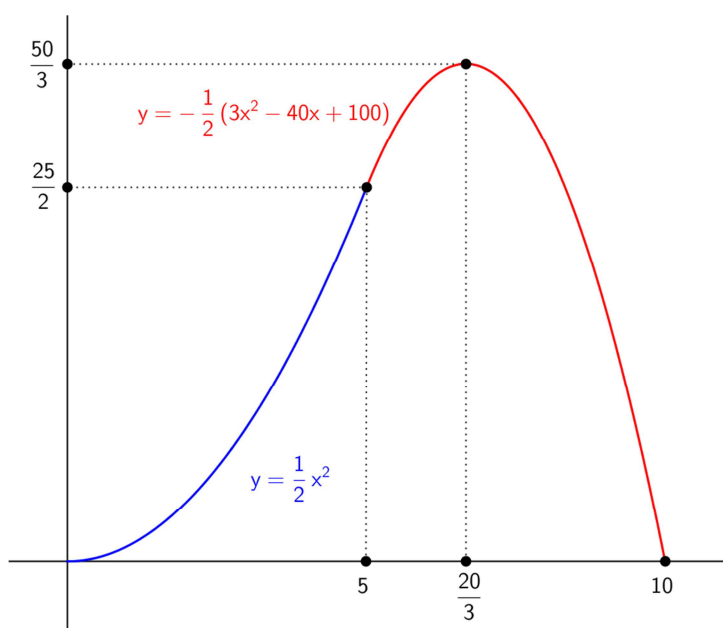
$$\text{temos } f(x) = (DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 40x - 100).$$

Pode-se também calcular

$$(DEGH) = (ABC) - (DEC) - (ADG) - (EBH) = (ABC) - (DEC) - 2(ADG);$$

deixamos esse cálculo para o(a) leitor(a).

c) O gráfico de f aparece abaixo.



d) Observamos primeiro que $-\frac{1}{2}(3x^2 - 40x + 100) = -\frac{1}{2}(3x - 10)(x - 10)$; essa fatoração pode ser obtida a partir das raízes de $3x^2 - 40x + 100$, que são $\frac{10}{3}$ e 10.

Quando $0 < x \leq 5$ o maior valor de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ é $f(5) = \frac{25}{2}$. Por outro lado,

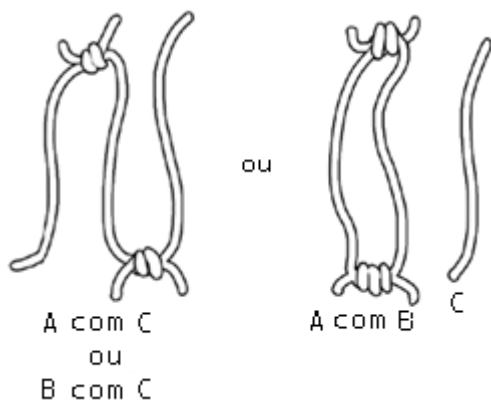
quando $5 < x < 10$ o maior valor de $f(x) = -\frac{1}{2}(3x - 10)(x - 10)$ é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes, ou seja, é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + 10\right) = \frac{20}{3}; \text{ temos } f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{50}{3}. \text{ Como } f(5) = \frac{25}{2} < \frac{50}{3} = f\left(\frac{20}{3}\right), \text{ o maior}$$

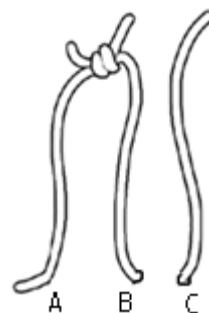
valor possível da área de sobreposição é $\frac{50}{3}$.

N3Q5

- a) *1ª solução:* Após amarrar dois barbantes do lado de cima da mão, temos a situação da figura à direita. Os possíveis resultados após amarrar duas pontas do outro lado da mão são



mostrados na figura à esquerda. Temos 2 possibilidades para o caso da esquerda (barbantes unidos em um único fio) e 1 possibilidade para o caso da direita, num total de $2+1=3$. Assim, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$.



Podemos expressar esse raciocínio dizendo que, uma vez dado um nó do lado de cima da mão, a ponta em baixo correspondente à ponta solta em cima tem 3 escolhas: ficar sozinha ou unir-se a uma das outras duas. Em 2 dessas escolhas (unir-se a uma das outras duas) é formado um único fio, ou seja, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$.

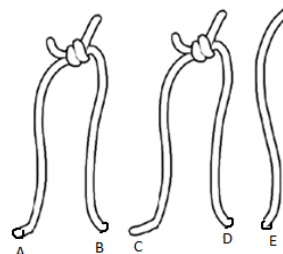
2ª solução: Vamos supor que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C'. Para dar um nó em cima da mão, basta escolher a ponta que vai ficar solta (3 possibilidades) e amarrar as outras duas. O mesmo ocorre do outro lado da mão, e segue que temos $3 \times 3 = 9$ possibilidades para dar nós de ambos os lados da mão. Haverá um barbante isolado quando a ponta solta do lado de baixo for a ponta correspondente à ponta solta do lado de cima; isso ocorre uma vez a cada escolha de como amarrar os barbantes na parte de cima, num total de 3 casos. Logo, a probabilidade de que os barbantes não estejam unidos em um único fio é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ e a de que estejam unidos em um único fio é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

- b) *1ª solução:* Como na 1ª solução do item (a), após dar dois nós de um dos lados da mão, a outra ponta do barbante não usado tem 5 escolhas, sendo que em apenas 1 delas ele ficará solto; logo, a probabilidade de que um dos pedaços fique isolado é $\frac{1}{5}$.

2ª solução: Como na 2ª solução do item (a), vamos supor que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C, D e E e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C', D' e E'. Para dar os nós em cima da mão, basta escolher a ponta que vai ficar solta (5 possibilidades) e amarrar as outras quatro duas a duas (3 possibilidades; por exemplo, se A ficou solta, as possibilidades são (BC,DE), (BD,CE) e (BE,CD)). O mesmo ocorre do outro lado da mão, e segue que temos $(5 \times 3)^2$ possibilidades para dar nós de ambos os lados da mão. Haverá um barbante isolado quando a ponta solta do lado de baixo for a ponta correspondente à ponta solta do lado de cima; isso ocorre uma vez a cada escolha de como amarrar os barbantes na parte de cima, num total de $(5 \times 3) \times 3$ (5×3 escolhas da ponta solta na parte de baixo, uma para cada possibilidade de dar nós na parte de cima, e 3 escolhas de como amarrar as outras quatro pontas). Logo, a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais é $\frac{(5 \times 3) \times 3}{(5 \times 3)^2} = \frac{1}{5}$.

- c) **1ª solução:** Como na 1ª solução do item (b), após dar dois nós de um dos lados da mão, a outra ponta do barbante não usado tem 5 escolhas, a saber, ficar solta ou unir-se a uma das outras 4 pontas; para formar um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que acontece com probabilidade $\frac{4}{5}$. Isso feito, a outra ponta do fio ao qual a ponta solta foi unida tem 3 possibilidades, a saber, ficar solta ou unir-se a uma das outras 2 pontas; para formar um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que acontece com probabilidade $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

Para exemplificar esse raciocínio, observamos na figura ao lado que a ponta E pode ser unida às pontas A, B, C e D. Se, por exemplo, ela for unida à ponta A, para que os barbantes formem um único fio é necessário que a ponta B seja unida a uma das pontas C ou D.



2ª solução: Supomos aqui também que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C, D e E e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C', D' e E'. Já vimos que o número de maneiras de dar dois nós de ambos os lados da mão é $(5 \times 3)^2$. Para cada maneira de amarrar os barbantes na parte de cima (5×3 possibilidades), haverá um fio único quando a ponta da parte de baixo correspondente à ponta solta em cima for unida a uma das outras quatro (4 possibilidades) e, depois disso, a outra ponta (em baixo) do barbante de três fios assim formado for unida a uma das restantes (2 possibilidades). Logo a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é $\frac{(5 \times 3) \times 4 \times 2}{(5 \times 3)^2} = \frac{8}{15}$.

N3Q6

- a) Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n = 8a + r = 7b + s$ onde $0 \leq r \leq 7$ e $0 \leq s \leq 6$; segue que $A(n) = a + r$ e $B(n) = b + s$. Por exemplo, $14 = 8 \times 1 + 6 = 7 \times 2 + 0$, donde $A(14) = 1 + 6 = 7$ e $B(14) = 2 + 0 = 2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(n)$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$B(n)$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

- b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228		229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
$A(n)$	32		33	34	35	29	30	31	32	33	34	35	36	30
$B(n)$	36		37	38	33	34	35	36	37	38	39	34	35	36

Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro; por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

- c) Das expressões $n = 8a + r = 7b + s$ temos $A(n) = a + r = \frac{n-r}{8} + r = \frac{n+7r}{8}$ e

$$B(n) = b + s = \frac{n-s}{7} + s = \frac{n+6s}{7}. \text{ Desse modo, } A(n) = B(n) \text{ se escreve como}$$

$\frac{n+7r}{8} = \frac{n+6s}{7}$; simplificando essa expressão chegamos a $n = 49r - 48s$. O maior valor possível para $49r - 48s$ é obtido colocando $r = 7$ e $s = 0$, ou seja, o número procurado é $d = 49 \times 7 = 343$.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que $A(n) < B(n)$ para $n > 343$.