

N1Q1

- a) A sequência é $4125 \rightarrow 537 \rightarrow 810 \rightarrow 91 \rightarrow 10 \rightarrow 1$
- b) Os seis primeiros termos são $995 \rightarrow 1814 \rightarrow 995 \rightarrow 1814 \rightarrow 995 \rightarrow 1814$
- c) Os primeiros termos da sequência são
 $33333 \rightarrow 6666 \rightarrow 121212 \rightarrow 33333 \rightarrow 6666 \rightarrow \dots$
 e vemos que os termos se repetem de três em três. Como $103 = 3 \times 34 + 1$, segue que o 103º termo dessa sequência é 33333.

N1Q2

- a) Do 10º andar até o 15º andar há 6 andares, cada um com 25 quartos. Logo o número de quartos do 10º andar para cima é $6 \times 25 = 150$.
- b) O número de uma chave é formado pelo número do andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Podemos dividir as chaves em quatro casos, como segue:
1. andar com 1, quarto sem 1
 2. andar sem 1, quarto com 1
 3. andar e quarto com 1
 4. andar e quarto sem 1

Observamos os andares cujos números têm o algarismo 1 são 1, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, num total de 7; segue que os andares sem 1 são em número de $15 - 7 = 8$. Os quartos com 1 são 01, 10, 11, ..., 19 e 21, num total de 12; os quartos sem 1 são então em número de $25 - 12 = 13$. O princípio fundamental da contagem nos permite saber quantas chaves aparecem em cada um dos grupos:

1. andar com 1, quarto sem 1: $7 \times 13 = 91$
2. andar sem 1, quarto com 1: $8 \times 12 = 96$
3. andar e quarto com 1: $7 \times 12 = 84$
4. andar e quarto sem 1: $8 \times 13 = 104$

Os três primeiros grupos consistem das chaves com 1, que são em número de $7 \times 13 + 8 \times 12 + 7 \times 12 = 271$.

Podemos também proceder, observando que para obter o número de chaves com 1 basta retirar, do total de chaves, as chaves do grupo 4 acima. Como o número total de chaves é 15×25 , isso nos leva à conta $15 \times 25 - 8 \times 13 = 271$.

- c) O número total de chaves é $15 \times 25 = 375$. Para obter o número de chaves procurado, primeiro eliminamos as chaves de quartos nos andares 11 e 13, que são em número de $2 \times 25 = 50$. Restam 13 andares a considerar; devemos eliminar também as chaves dos quartos 11 ou 13 desses andares, o que nos dá $13 \times 2 = 26$ chaves. Finalmente, devemos considerar as chaves do andar 1 e, neste andar, de quartos cujo dígito das dezenas seja também 1. Como já eliminamos os quartos 11 e 13 de todos os andares, os números possíveis para esses quartos são 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, ou seja, devemos ainda eliminar 8 chaves. Desse modo, o número de chaves em que não aparecem as sequências 11 ou 13 é $375 - 50 - 26 - 8 = 291$.

Podemos também analisar as chaves que devemos eliminar dividindo os andares em três grupos: (i) 1º andar, (ii) 11º e 13º andar e (iii) os outros andares. No caso (i), temos as chaves dos quartos de 10 a 19, num total de 10. No caso (ii), temos todas as chaves desses andares, num total de $2 \times 25 = 50$. Em (iii) temos 12 andares e as chaves dos quartos 11 e 13, num total de $12 \times 2 = 24$. Como o número total de chaves é 375, restam $375 - 10 - 50 - 24 = 291$ chaves nas quais não aparecem 11 ou 13.

N1Q3

Quando dois tanques são equalizados, o volume total de água desses tanques é a soma dos volumes antes da equalização; logo, ao final de uma equalização, o volume de água de cada um dos tanques é a média aritmética dos volumes iniciais. Em particular, quando dois tanques são equalizados, o tanque com mais água fica com menos e o com menos fica com mais. Isso mostra que o volume de água do tanque **A** será sempre maior ou igual ao de **B**, que por sua vez será sempre maior ou igual ao de **C**; em particular, vemos que o volume de água de **A** sempre será maior ou igual ao volume de água dos outros tanques e que o volume de água em **C** nunca diminui.

- a) Ao abrir **R1**, os tanques **A** e **B** ficarão com $\frac{32 + 24}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ m}^3$ de água cada;

com a notação do enunciado, temos $(32; 24; 8) \xrightarrow{\text{R1}} (28; 28; 8)$.

- b) Observamos que há apenas duas sequências possíveis: a que começa com **R1** e a que começa com **R2**. A segunda delas é a sequência procurada:

$$\begin{aligned}
 (32; 24; 8) &\xrightarrow{\text{R2}} (32; 16; 16) \xrightarrow{\text{R1}} (24; 24; 16) \xrightarrow{\text{R2}} (24; 20; 20) \\
 &\xrightarrow{\text{R1}} (22; 22; 20) \xrightarrow{\text{R2}} (22; 21; 21)
 \end{aligned}$$

- c) Mostramos a seguir os termos iniciais das sequências que começam com **R1** e **R2**:

$$\begin{aligned}
 (32; 24; 8) &\xrightarrow{\text{R2}} (32; 16; 16) \xrightarrow{\text{R1}} (24; 24; 16) \xrightarrow{\text{R2}} (24; 20; 20) \\
 &\xrightarrow{\text{R1}} (22; 22; 20) \xrightarrow{\text{R2}} (22; 21; 21) \xrightarrow{\text{R1}} (21,5; 21,5; 21) \\
 (32; 24; 8) &\xrightarrow{\text{R1}} (28; 28; 8) \xrightarrow{\text{R2}} (28; 18; 18) \xrightarrow{\text{R1}} (23; 23; 18) \\
 &\xrightarrow{\text{R2}} (23; 20,5; 20,5) \xrightarrow{\text{R1}} (21,75; 21,75; 20,5)
 \end{aligned}$$

Como o volume de água de **A** é sempre maior ou igual que o de **C** e o volume de **C** não diminui, segue que, o volume de água em **A** será sempre maior que 21 m^3 .

Podemos também argumentar que como a média aritmética de um conjunto de números é menor ou igual que o maior desses números, o volume de água em **A** será sempre maior ou igual à média aritmética do volume total de água dos três tanques; essa média é

$$\frac{32 + 24 + 8}{3} = \frac{64}{3} = 21 + \frac{1}{3} \text{ m}^3, \text{ que é maior que } 21 \text{ m}^3.$$

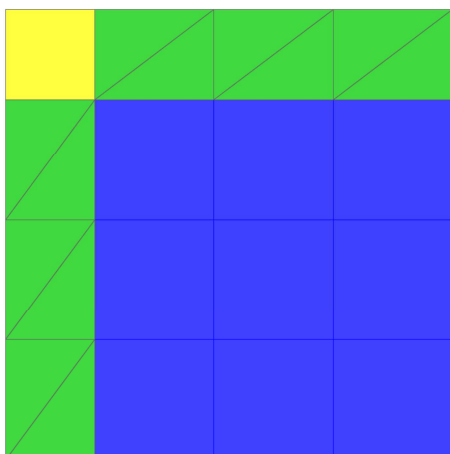
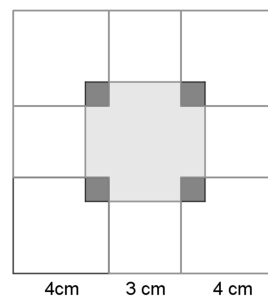
N1Q4

Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ e as verdes têm $\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

a) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 6 + 9 + 16 = 37 \text{ cm}^2$.

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4 + 3 + 4 = 11 \text{ cm}$, cuja área é $11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 100 \text{ cm}^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 100 = 21 \text{ cm}^2$.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5 \times 5 - 4 \times 1 \times 1 = 21 \text{ cm}^2$.

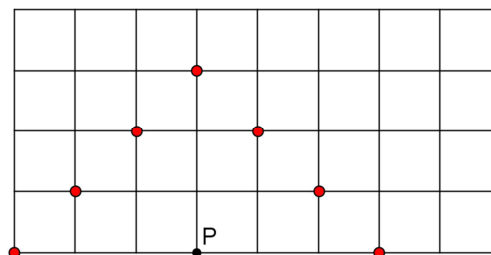
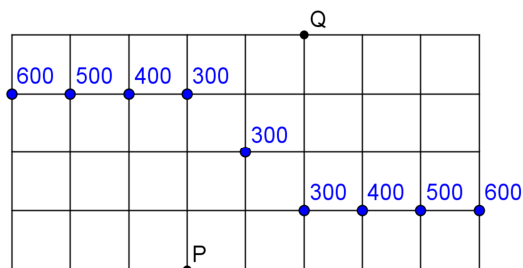


c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15 , como pedido, é mostrado na figura ao lado.

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2 , ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

N1Q5

- a) As esquinas que estão a 300 metros da esquina **P** aparecem assinaladas em vermelho ao lado.



- b) As esquinas equidistantes de **P** e de **Q** aparecem em azul na figura ao lado, com a indicação de suas distâncias a **P** e **Q**.

- c) A tabela preenchida aparece a seguir.

Ponto	Distância a P	Distância a R	Soma das distâncias a P e a R
S	400	700	1100
J	300	800	1100
L	300	600	900
M	500	600	1100
N	500	800	1300

- d) O item anterior mostra que, ao passar de uma esquina qualquer para uma de suas vizinhas, a soma das distâncias a **P** e a **R** muda por um múltiplo de 200. Como em **S** essa soma não é um múltiplo de 200 e podemos chegar a qualquer esquina a partir de **S** passando de vizinha a vizinha, segue que essa soma não é um múltiplo de 200 em todas as esquinas. Logo não há esquina equidistante de **P** e **R**, pois em uma tal esquina a soma de suas distâncias a **P** e a **R** seria um múltiplo de 200.

N1Q6

- a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.
- b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

- c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:
- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
 - se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
 - se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
 - se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

- d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é

$$\frac{2^9}{2} = 2^8.$$