

QUESTÃO 1 **ALTERNATIVA E**

Como Ana contribuiu com 43 reais e Aurora com 68 reais, os três livros juntos custaram $43 + 68 = 111$ reais; desse modo, cada livro custou $111 \div 3 = 37$ reais, que é o que cada uma das três colegas deveria ter pago. Logo, Ana deve receber de Alice a quantia de $43 - 37 = 6$ reais e Aurora deve receber de Alice $68 - 37 = 31$ reais. Observamos que Ana vai pagar a Alice e Aurora, no total, a quantia de $6 + 31 = 37$ reais.

QUESTÃO 2 **ALTERNATIVA D**

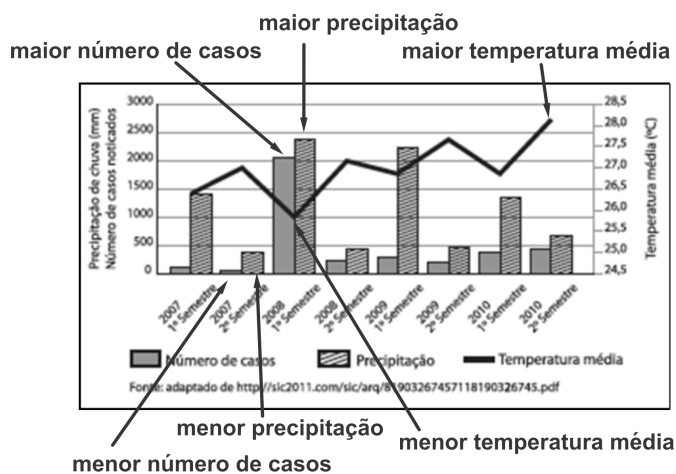
A única maneira de somar três números distintos entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e obter o resultado 6 é $1 + 2 + 3 = 6$. Logo os cartões com as letras O, B e E têm, em seu verso, os números 1, 2 ou 3 (não necessariamente nessa ordem). Ao olhar para o verso dos cartões com as letras O e P, Caetano vê no verso do cartão O um dos números 1, 2 e 3. Observando as somas $1 + 7 = 8$, $2 + 6 = 8$ e $3 + 5 = 8$, e lembrando que o número no verso do cartão P é no máximo 5, vemos que os números no verso dos cartões O e P são, respectivamente, 3 e 5. Resta o número 4, que é o que está no verso do cartão M.



QUESTÃO 3 **ALTERNATIVA D**

Vamos analisar as afirmativas uma a uma, de acordo com a figura ao lado.

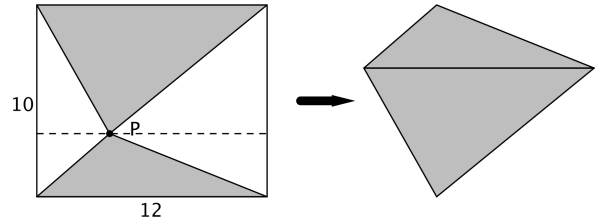
- falsa:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) teve o maior número de casos notificados de dengue, mas não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010).
- falsa:** o período com menor número de casos notificados de dengue (2º semestre 2007) não foi o de maior temperatura média (2º semestre 2010).
- falsa:** o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) não foi o de maior precipitação (1º semestre 2008).
- verdadeira:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) e teve o maior número de casos notificados de dengue.
- falsa:** basta comparar o 1º semestre de 2007 com o 2º semestre de 2009: no primeiro a precipitação é maior do que no segundo, mas o seu número de casos de dengue é menor.



QUESTÃO 4

ALTERNATIVA B

A área do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos. Traçando por P uma paralela a um dos lados do retângulo, como na figura, este fica dividido em dois retângulos menores. A área de cada um dos triângulos é igual à metade da área do retângulo menor correspondente; como a soma das áreas dos retângulos menores é igual à área do retângulo maior, segue que a soma das áreas dos triângulos é igual à metade da área do retângulo maior, ou seja, é igual a $\frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60 \text{ cm}^2$; essa é a área do quadrilátero.



QUESTÃO 5

ALTERNATIVA A

Ao somar os algarismos das unidades, encontramos $77 \times 7 = 539$. Logo, o algarismo das unidades da soma é 9 e 53 deve ser adicionado à casa das dezenas. A soma dos algarismos 7 que aparecem nas dezenas é $76 \times 7 = 532$, que somada a 53 dá 585. Logo, o algarismo das dezenas é 5.

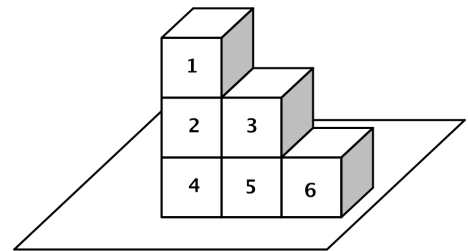
Alternativamente, podemos observar que os algarismos das dezenas e unidades da soma só dependem da soma dos algarismos das unidades e das dezenas das parcelas, ou seja, são os mesmos que os algarismos correspondentes da soma $7 + \underbrace{77 + 77 + \dots + 77}_{76 \text{ vezes}} = 7 + 76 \times 77 = 5859$;

logo, o algarismo das dezenas da soma indicada é 9 e o das dezenas é 5.

QUESTÃO 6

ALTERNATIVA A

A soma de todas as faces de um cubo é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6 \times 21 = 126 - (\text{a soma das faces escondidas})$. Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura ao lado.

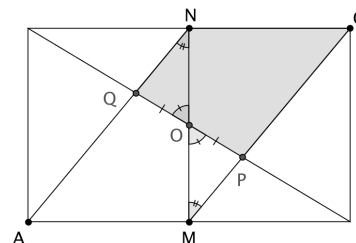


- **Cubo 1:** há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.
- **Cubos 2 e 4:** em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2 \times (1 + 7) = 16$.
- **Cubos 3 e 6:** em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam $2 \times (1 + 2) = 6$.
- **Cubo 5:** há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.

Logo, a soma máxima possível é $126 - (1 + 16 + 6 + 14) = 126 - 37 = 89$.

QUESTÃO 7 ALTERNATIVA C

Na figura ao lado o quadrilátero $AMCN$ é um paralelogramo, pois tem os lados AM e NC paralelos e iguais. Em particular, AN e MC são paralelos; logo, os ângulos assinalados em M e N têm a mesma medida. Além disso, os ângulos assinalados em O são iguais, pois são opostos pelo vértice; além disso temos $OP = OQ$, pois O é o centro do retângulo. Segue pelo critério ALA que os triângulos OMP e ONQ são congruentes. A área do quadrilátero



$CPQN$ é então igual à área do triângulo CMN , que por sua vez é igual a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo, ou seja, igual a $\frac{1}{4} \times 120 = 30 \text{ m}^2$.

QUESTÃO 8 ALTERNATIVA B

Seja n o número que Lucas pensou. O enunciado diz que $n = 285q + 77$, onde q é um número inteiro. Como $285 = 57 \times 5$, podemos reescrever essa expressão como

$$n = 57 \times (5q) + 57 + 20 = 57 \times (5q + 1) + 20.$$

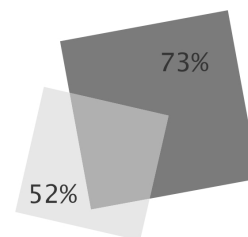
Logo o resto da divisão de n por 57 é 20.

QUESTÃO 9 ALTERNATIVA A

Vamos chamar de ℓ e L , respectivamente, os lados do quadrado menor e do quadrado maior, e de Q a área comum aos dois quadrados. Então Q corresponde a $100 - 52 = 48\%$ da área do quadrado menor e a

$100 - 73 = 27\%$ da área do quadrado maior. Segue que $\frac{48}{100} \ell^2 = \frac{27}{100} L^2$; logo

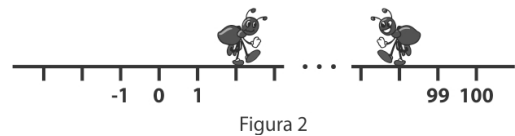
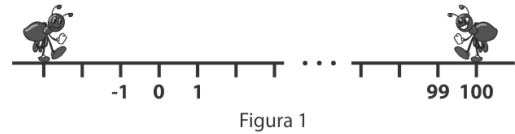
$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \text{ ou seja, } \frac{\ell}{L} = \frac{3}{4}.$$



QUESTÃO 10

ALTERNATIVA D

Vamos chamar de **A** a formiguinha da esquerda e de **B** a formiguinha da direita. Na figura 1, **A** está duas unidades à esquerda do número -1 , ou seja, sobre o número -3 ; na figura 2, ela está sobre o número 2 . Na figura 1, **B** está sobre o número 100 e, na figura 2, sobre o número 98 . Desse modo, em um segundo, **A** anda $2 - (-3) = 5$ unidades e **B** anda $100 - 98 = 2$ unidades. Assim, as posições de **A** e **B** são, respectivamente, dadas (em unidades) por $a = -3 + 5t$ e $b = 100 - 2t$, onde t é o tempo medido em segundos. As formiguinhas se encontrarão quando $a = b$, ou seja, no tempo t tal que



$-3 + 5t = 100 - 2t$. Temos então $7t = 103$, ou seja, $t = \frac{103}{7}$. A posição de **B** (e de **A**) nesse instante é $100 - 2 \times \frac{103}{7} = \frac{494}{7}$, que é aproximadamente $70,6$. Logo as formiguinhas se encontrarão entre os pontos 70 e 71 .

Outra solução é a seguinte. Já calculamos as velocidades das formiguinhas: **A** se desloca a 5 unidades por segundo e **B** a 2 unidades por segundo. Como elas andam em sentido contrário, a distância entre elas diminui 7 unidades por segundo. A distância inicial entre **A** e **B** é $100 - (-3) = 103$ unidades; como $103 = 14 \times 7 + 5$, concluímos que após 14 segundos a distância entre as formiguinhas será 5 unidades; nesse instante, **A** estará no ponto $-3 + 5 \times 14 = 67$ e **B** no ponto $100 - 2 \times 14 = 72$. Dividimos a distância 5 em 7 partes iguais; as formiguinhas se encontrarão quando **A** tiver percorrido 5 dessas partes e **B** tiver percorrido 2 dessas partes. Logo o ponto de encontro será o ponto $67 + 5 \times \frac{5}{7} = \frac{494}{7}$, que é aproximadamente $70,6$.

QUESTÃO 11

ALTERNATIVA E

Escrevemos o número como cdu , onde c , d e u denotam, respectivamente, o algarismo das centenas, dezenas e unidades; isso quer dizer que o número é $100c + 10d + u$. O número obtido trocando o algarismo das unidades com o das dezenas é $cd u$, ou seja, $100c + 10u + d$; o enunciado nos diz que

$$18 = (100c + 10u + d) - (100c + 10d + u) = 10(u - d) + (d - u) = 9(u - d)$$

e segue que $u - d = 2$. O número obtido trocando o algarismo das dezenas com o das centenas é dcu ; do enunciado segue, como acima, que

$$180 = (100d + 10c + u) - (100c + 10d + u) = 100(d - c) + 10(c - d) = 9(d - c)$$

e temos $d - c = 2$. Logo $u - c = (u - d) + (d - c) = 4$. O problema pede para calcular a diferença entre o número original cdu e aquele obtido trocando os algarismos das unidades com o das centenas, que é udc . Essa diferença é então

$$(100u + 10d + c) - (100c + 10d + u) = 100(u - c) + (c - u) = 99(u - c) = 99 \times 4 = 396$$

QUESTÃO 12 **ALTERNATIVA B**

Vamos chamar de a , b e h , respectivamente, o comprimento, a largura e a profundidade da piscina, em número de azulejos. Em geral, o comprimento de uma piscina é maior do que a sua largura; vamos então supor que $a \geq b$. As duas paredes retangulares no comprimento da piscina têm um total de $2ah$ azulejos e as duas paredes retangulares na largura da piscina têm um total de $2bh$ azulejos. Como essas quatro paredes juntas têm 1024 azulejos, segue que $(2a+2b)h=1024$, ou seja, $(a+b)h=512$; em particular, $a+b$ é um divisor de 512. Por outro lado, temos $ab=231$; como $231=3 \times 7 \times 11$, as possibilidades para a e b são $(21,11)$, $(33,7)$, $(77,3)$ e $(231,1)$. Dessas, a única que nos dá uma soma $a+b$ que divide 512 é $(21,11)$; logo $h=512 \div (a+b)=512 \div 32=16$ azulejos.

Notamos que essa questão admite (acidentalmente) uma solução por teste de alternativas, como segue. De $(a+b)h=512$ segue que h divide $512=2^9$, ou seja, h (assim como $a+b$) deve ser uma potência de 2. Como 15, 18, 20 e 21 não são potências de 2, a única possibilidade é $h=16$. Deve-se então verificar se o problema é consistente; para isso, determinamos $a=21$ e $b=11$ como acima, e essa tripla de valores de a , b e h satisfaz as condições do enunciado.

QUESTÃO 13 **ALTERNATIVA A**

Seja n o número comum de bolas nas caixas. O número de bolas azuis na primeira caixa é $\frac{1}{15}n$ e o número de bolas amarelas é $n - \frac{1}{15}n = \frac{14}{15}n$. Logo, o peso das bolas da primeira caixa é $5 \times \frac{1}{15}n + 2 \times \frac{14}{15}n = \frac{33}{15}n$ kg. Seja agora x o número de bolas azuis na segunda caixa; o número de bolas amarelas nessa caixa é então $n-x$ e o peso das bolas nessa caixa é $5x + 2(n-x) = 3x + 2n$. Segue que $3x + 2n = 2 \times \frac{33}{15}n = \frac{66}{15}n$, o que nos dá $x = \frac{1}{3} \left(\frac{66}{15}n - 2n \right) = \frac{4}{5}n$. Logo a fração de bolas azuis na segunda caixa é $\frac{4}{5}$.

QUESTÃO 14 **ALTERNATIVA E**

A tabela ao lado apresenta alguns estágios do jogo. O padrão da coluna dos triângulos é evidente: no estágio $2k$, o valor que aparece é $5 \times 2^{k-1}$. Logo, o número que aparece no 56º triângulo é 5×2^{27} .

Estágio	Triângulo	Quadrado
1	3	2
2	5	1
3	$6 = 3 \times 2$	4
4	$10 = 5 \times 2$	2
5	$12 = 3 \times 2^2$	8
6	$20 = 5 \times 2^2$	4
7	$24 = 3 \times 2^3$	16
8	$40 = 5 \times 2^3$	8

QUESTÃO 15

ALTERNATIVA C

Sejam a e b , respectivamente, os algarismos das dezenas e das unidades do ano em que Sofia nasceu; isto quer dizer que Sofia nasceu em $19ab = 1900 + 10a + b$. A idade de Sofia em fevereiro de 2013 era $2013 - 19ab = 2013 - (1900 + 10a + b) = 113 - 10a - b$. Segue do enunciado que $113 - 10a - b = 1 + 9 + a + b = 10 + a + b$, o que nos dá $103 = 11a + 2b$. Como a e b são algarismos, ou seja, são ambos menores ou iguais a 9, a única possibilidade é $a = 9$ e $b = 2$; observamos que se $a = 8$, a equação $2b = 15$ não tem solução inteira e que se $a \leq 7$ então $2b = 103 - 11a \geq 103 - 77 = 26$, o que não pode acontecer pois $b \leq 9$.

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA C

Para escrever o número 1, Heloísa pode escolher uma dentre seis faces e o número 6 deve ser escrito na face oposta à escolhida. Para escrever o número 2, ela pode escolher uma entre as quatro faces restantes e o número 5 deve ser escrito na face oposta. Finalmente, restam duas faces para escrever o número 3, e o 4 deve ser escrito na face oposta. Assim, Heloísa pode escrever os números no cubo de $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA B

Na tabela abaixo mostramos como analisar as informações do enunciado. Na primeira linha, supomos que Bernardo disse a verdade; na segunda, que Guto disse a verdade e na terceira, que Carlos disse a verdade.

	Guto <i>Não foi o meu</i>	logo	Carlos <i>Foi o meu</i>	logo	Bernardo <i>Não foi o de Guto</i>	logo
1	mentiu	O celular de Guto tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	disse a verdade	O celular de Guto não tocou
2	disse a verdade	O celular de Guto não tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	mentiu	O celular de Guto tocou
3	mentiu	O celular de Guto tocou	disse a verdade	O celular de Carlos tocou	mentiu	O celular de Guto tocou

Nas duas primeiras linhas, chega-se à conclusão de que o celular de Guto tanto tocou quanto não tocou (em vermelho). Essa contradição mostra que o único caso possível é o da terceira linha, ou seja, Carlos disse a verdade e os celulares de Guto e Carlos tocaram.

QUESTÃO 18

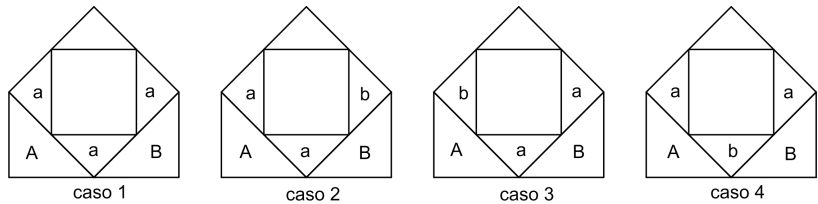
ALTERNATIVA C

Lembramos que $\text{rendimento} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{consumo}}$, ou seja, $\text{consumo} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{rendimento}}$. Seja d a distância entre Quixajuba e Pirajuba. Antes da parada Cláudia percorreu $\frac{1}{3}d$ km; como o rendimento de seu carro nessa parte da viagem foi de 12 km/l, ela gastou $\frac{\frac{1}{3}d}{12} = \frac{1}{36}d$ litros de gasolina até a parada. Analogamente, ela gastou $\frac{\frac{2}{3}d}{16} = \frac{1}{24}d$ litros de gasolina após a parada. No total, ela gastou $\frac{1}{36}d + \frac{1}{24}d = \frac{5}{72}d$ litros de gasolina na viagem; o rendimento de seu carro ao longo da viagem completa foi então de $\frac{d}{\frac{5}{72}d} = \frac{72}{5} = 14,4$ km/l.

QUESTÃO 19

ALTERNATIVA C

Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3 \times 2 = 6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores



dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura. As letras minúsculas a e b indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas A e B servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.

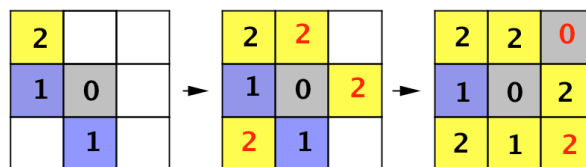
- **Caso 1:** temos duas escolhas para a ; uma vez feita essa escolha, podemos pintar A com duas cores, bem como B . Isso pode ser feito de $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras diferentes.
- **Caso 2:** temos duas escolhas para a e uma para b ; feitas essas escolhas, podemos pintar A com duas cores e B com apenas uma. Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$ maneiras diferentes.
- **Caso 3:** esse caso é idêntico ao caso 2.
- **Caso 4:** temos duas escolhas para a e uma para b ; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar A e B . Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$ maneiras diferentes.

No total, temos $6 \times (8 + 4 + 4 + 2) = 6 \times 18 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

QUESTÃO 20 ALTERNATIVA E

Observamos inicialmente que em qualquer quadradinho, quando o número de trocas de cor é um múltiplo de 3, voltamos à cor original. Assim, para saber, em qualquer momento, qual a cor de um quadradinho, basta conhecer o resto na divisão por 3 do número de trocas de cor. Para isso, identificamos cada quadradinho cinza com o número 0 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 0 na divisão por 3, ou seja, a cor pode não ter sido trocada ou foi trocada em um número múltiplo de 3); identificamos um quadradinho azul com o número 1 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 1 na divisão por 3); e, finalmente, identificamos um quadradinho amarelo com o número 2 (o número de trocas de cor tem resto 2 na divisão por 3).

Observamos agora que, sempre que trocamos a cor de um quadradinho da primeira ou da terceira coluna, trocamos também a cor do quadradinho a seu lado na coluna do meio. Portanto, a soma do número de trocas de cor dos quadradinhos de uma mesma linha, que estão na primeira e terceira colunas, é igual ao número de trocas de cor do quadradinho da coluna do meio que está nesta mesma linha. Em particular, o resto da divisão do número de trocas de um quadradinho da coluna do meio por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos restos das divisões por 3 do número de trocas de cores dos quadradinhos vizinhos que estão na primeira e na terceira coluna da mesma linha. Comentário análogo vale para os quadradinhos da linha do meio. Essas observações nos permitem reconstruir o quadriculado completo, conforme a figura abaixo.



O problema não acaba aqui, pois ainda não mostramos que esse quadriculado pode, de fato, ser obtido por uma sequência de Adão. Que isso de fato acontece pode ser visto abaixo.

