

QUESTÃO 1 ALTERNATIVA D

O comprimento da mesa é $8 \times 22 = 176$ centímetros; logo, o palmo de Carolina mede $176 \div 11 = 16$ centímetros.

QUESTÃO 2 ALTERNATIVA B

Observemos que $2 + 0 + 1 + 3 = 6$, ou seja, a soma dos algarismos do número 2013 é igual a 6. Como $2013 = 6 \times 335 + 3$, concluímos que o lado esquerdo da igualdade dada no enunciado, que pode ser reescrito como

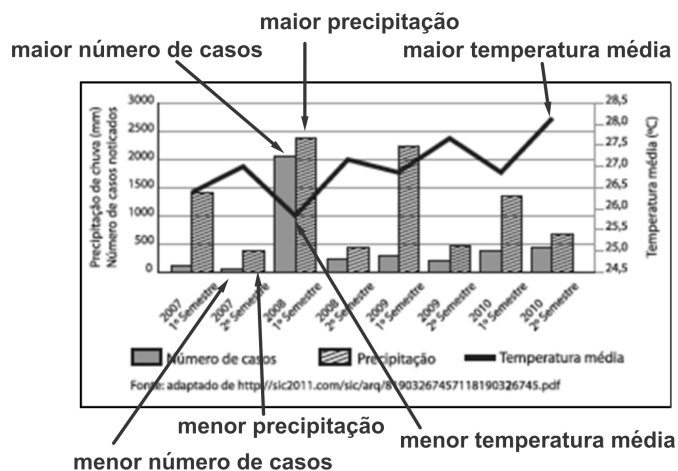
$$\underbrace{2+0+1+3}_{4} + \underbrace{2+0+1+3}_{4} + \underbrace{2+0+1+3}_{4} + \dots + \underbrace{2+0+1+3}_{4} + \underbrace{2+0+1}_{2}$$

é formado por 335 blocos da forma $2 + 0 + 1 + 3 +$, cada um contendo 4 sinais de adição, e um bloco da forma $2 + 0 + 1$, que contém 2 sinais de adição. Portanto, o número total de sinais de adição que foram utilizados na igualdade é igual a $4 \times 335 + 2 = 1342$.

QUESTÃO 3 ALTERNATIVA D

Vamos analisar as afirmativas uma a uma, de acordo com a figura ao lado.

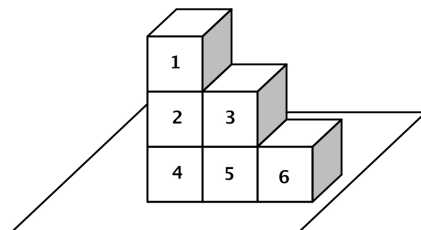
- falsa:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) teve o maior número de casos notificados de dengue, mas não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010).
- falsa:** o período com menor número de casos notificados de dengue (2º semestre 2007) não foi o de maior temperatura média (2º semestre 2010).
- falsa:** o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) não foi o de maior precipitação (1º semestre 2008).
- verdadeira:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) e teve o maior número de casos notificados de dengue.
- falsa:** basta comparar o 1º semestre de 2007 com o 2º semestre de 2009: no primeiro a precipitação é maior do que no segundo, mas o seu número de casos de dengue é menor.



QUESTÃO 4 ALTERNATIVA A

Por um erro de revisão, a solução enviada às escolas não correspondia a essa questão. Pedimos desculpas por essa falha.

A soma de todas as faces de um cubo é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6 \times 21 = 126 - (\text{a soma das faces escondidas})$. Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura ao lado.



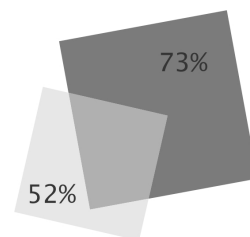
- *Cubo 1*: há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.
 - *Cubos 2 e 4*: em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2 \times (1 + 7) = 16$.
 - *Cubos 3 e 6*: em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam $2 \times (1 + 2) = 6$.
 - *Cubo 5*: há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.
- Logo, a soma máxima possível é $126 - (1 + 16 + 6 + 14) = 126 - 37 = 89$.

QUESTÃO 5 ALTERNATIVA A

Vamos chamar de ℓ e L , respectivamente, os lados do quadrado menor e do quadrado maior, e de Q a área comum aos dois quadrados. Então Q corresponde a $100 - 52 = 48\%$ da área do quadrado menor e a $100 - 73 = 27\%$

da área do quadrado maior. Segue que $\frac{48}{100} \ell^2 = \frac{27}{100} L^2$; logo

$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \text{ ou seja, } \frac{\ell}{L} = \frac{3}{4}.$$



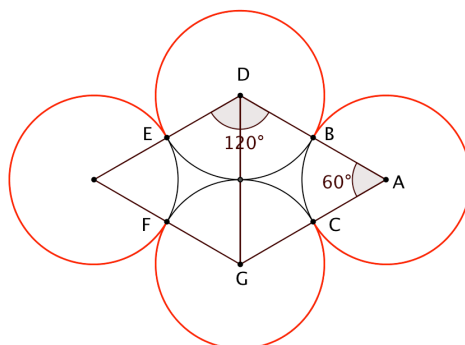
QUESTÃO 6 ALTERNATIVA E

Seja r o raio comum das circunferências. Unindo os centros A , D e G de três das circunferências, como na figura ao lado, e lembrando que a reta que passa pelos centros de duas circunferências tangentes passa também pelo ponto de tangência, vemos que o triângulo ADG é equilátero, pois todos seus lados medem $2r$. Logo todos seus ângulos medem 60° ; em particular, o ângulo central \widehat{BAC} mede 60° . Segue que o arco preto \widehat{BC} corresponde ao ângulo central de $60^\circ = \frac{1}{6} \times 360^\circ$, ou seja, esse arco mede $\frac{1}{6}$ do comprimento da

circunferência, que é $\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$; esse também é o comprimento do

arco preto \widehat{EF} . Já o arco preto \widehat{BE} corresponde a um ângulo central de 120° ; seu comprimento é então duas vezes o de um arco correspondente a 60° , ou seja, é $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, que é também o comprimento do

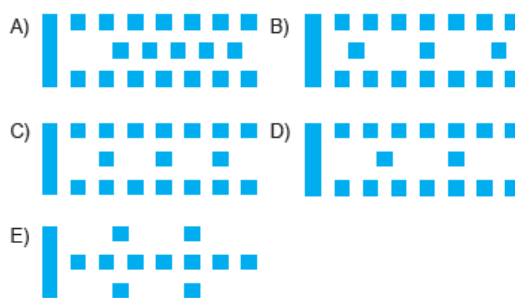
arco preto \widehat{CF} . Desse modo, o comprimento total dos arcos pretos é $2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$; como a soma dos comprimentos das circunferências é 4, o comprimento dos arcos vermelhos é $4 - 1 = 3$.



QUESTÃO 7

ALTERNATIVA D

A primeira marca da roda dianteira será deixada a uma distância de 50π da faixa de tinta, ou seja, quando esta roda girar toda a sua circunferência; as demais marcas serão espaçadas pela mesma distância. Esta observação elimina as alternativas (A) e (B). A mesma observação se aplica às rodas traseiras, nesse caso com o espaçamento de 20π ; em particular, o espaçamento entre as marcas da roda dianteira é igual a 2,5 vezes o espaçamento entre as marcas das rodas traseiras, o que elimina as alternativas (C) e (E) (e também (A)). Segue que a alternativa correta é (D); observamos que ela obedece a todas as condições acima.



QUESTÃO 8

ALTERNATIVA C

Na tabela abaixo mostramos os restos da divisão das notas por 3 e por 4

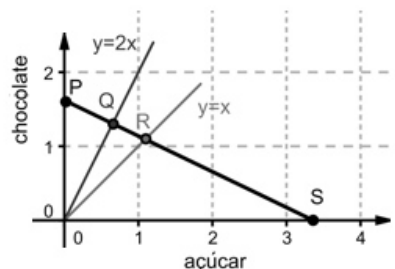
	75	80	84	86	95
resto da divisão por 3	0	2	0	2	2
resto da divisão por 4	3	0	0	2	3

Como a média das três primeiras notas é um número inteiro, vemos que a soma das três primeiras notas é um múltiplo de 3. A consulta à tabela mostra que a única maneira de somar três restos na primeira linha de modo a obter um múltiplo de 3 corresponde às notas 80, 86 e 95; logo, essas foram (não necessariamente nessa ordem) as três primeiras notas. De modo análogo, o fato de que a soma das quatro primeiras notas é um múltiplo de 4 mostra que essas notas devem ser 75, 86, 95 e uma entre 80 ou 84, que correspondem à única maneira possível de somar quatro números da segunda linha e obter um múltiplo de 4. Mas já sabemos que 80 é uma das três primeiras notas; logo as quatro primeiras notas foram 75, 80, 86 e 95 e a última nota foi 84.

QUESTÃO 9

ALTERNATIVA D

Consideremos primeiro os quatro pontos destacados na figura ao lado.



- **Ponto P:** Encontro da reta dada com o eixo y . Ele nos informa que se lara resolver gastar os R\$ 10,00 só com chocolate ela comprará um pouco menos de 2 kg de chocolate.
- **Ponto S:** Encontro da reta com o eixo x . Ele nos informa que se lara quiser gastar tudo em açúcar ela comprará um pouco mais do que 3 kg de açúcar.
- **Ponto R:** Encontro da reta dada com a reta $y = x$. Este ponto nos informa que lara pode comprar quantidades iguais de açúcar e chocolate. Notamos que, para qualquer outro ponto da reta dada, as quantidades de açúcar e chocolate serão diferentes.
- **Ponto Q:** Encontro da reta dada com a reta $y = 2x$. Este ponto indica a única situação em que a quantidade de chocolate é o dobro da quantidade de açúcar.

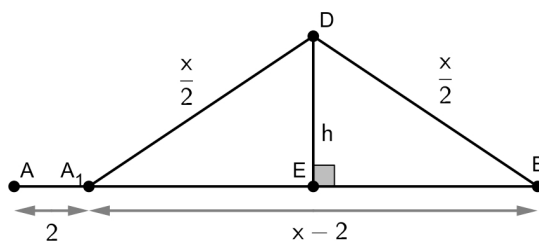
Vamos agora às opções.

- A) *Falsa:* para pontos entre P e R ocorre exatamente o contrário, ou seja, a quantidade de chocolate supera a quantidade de açúcar.
- B) *Falsa:* no ponto R as quantidades são iguais.
- C) *Falsa:* por exemplo, no ponto S todo o dinheiro seria gasto em açúcar. Logo, não se pode afirmar que Elisa gastou mais dinheiro em chocolate do que em açúcar.
- D) *Verdadeira:* como com R\$10,00 lara pode comprar um pouco mais do que 3 kg de açúcar ou um pouco menos do que 2 kg de chocolate, segue que o quilo do chocolate custa mais que $\frac{10}{2} = 5$ reais e o quilo de açúcar menos que $\frac{10}{3} < 3,4$ reais.
- E) *Falsa:* a quantidade de chocolate só corresponde ao dobro da quantidade de açúcar no ponto Q . Portanto, não se pode afirmar que isso ocorre.

QUESTÃO 10

ALTERNATIVA E

Suponhamos que a escada tenha comprimento $AB = x$. Na figura, os pontos A_1 e D indicam, respectivamente, as posições dos pontos A e C após o movimento. Como C é o ponto médio de AB , o triângulo A_1BD é isósceles com $A_1B = x - 2$ e $A_1D = BD = \frac{x}{2}$. A distância $h = DE$ do ponto D ao chão pode



então ser calculada pelo teorema de Pitágoras como $h = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \sqrt{x-1}$. No problema, temos

$x = 290$ cm e então $h = \sqrt{289} = 17$ cm.

QUESTÃO 11 ALTERNATIVA A

Vamos dividir os possíveis horários de Ana em dois casos: (1) se ela tem aula aos sábados e (2) se ela não tem aula aos sábados.

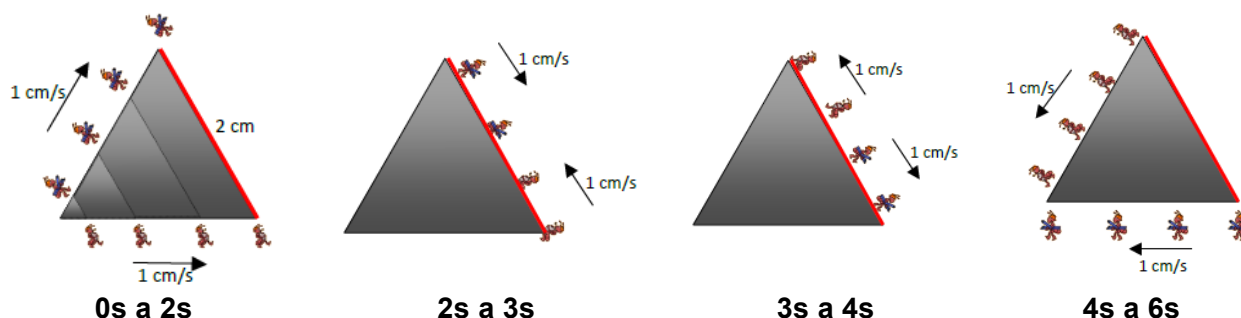
No caso (1), ela deve escolher sua aula de sábado (3 possibilidades) e depois sua aula à tarde (2 possibilidades) em algum dia de segunda a quinta (4 possibilidades). Temos então $3 \times 2 \times 4 = 24$ horários possíveis nesse caso.

No caso (2), ela deve escolher dois dias não consecutivos da semana (6 possibilidades), escolher um deles para ter aula pela manhã (2 possibilidades; automaticamente, no outro dia escolhido ela terá aula à tarde), escolher seu horário da manhã (3 possibilidades) e seu horário da tarde (2 possibilidades). Temos então $6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$ horários possíveis nesse caso.

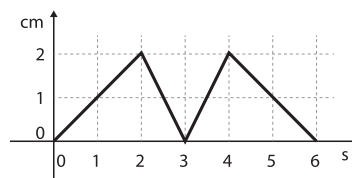
No total, Ana tem $24 + 72 = 96$ horários possíveis para fazer suas aulas com as restrições do enunciado.

QUESTÃO 12 ALTERNATIVA D

As figuras abaixo mostram as posições relativas das formiguinhas em diferentes intervalos de tempo de 0s a 6s.



- Na primeira figura, observamos que em qualquer instante o ponto de partida e as formiguinhas formam um triângulo equilátero; desse modo, de 0s a 2s, a distância entre as formiguinhas é igual à distância percorrida, ou seja, varia em 1cm/s.
- Na segunda figura, vemos que as formiguinhas andam uma em direção à outra e que a distância entre elas decresce em 2cm/s; desse modo, elas vão se encontrar no ponto médio do lado do triângulo no instante 3s.
- Na terceira figura elas já estão se afastando à velocidade de 2cm/s.
- Na quarta figura elas estão retornando ao ponto de partida e, de modo análogo à primeira figura, a distância entre elas decresce em 1cm/s.



Logo, o gráfico que melhor representa a distância entre as duas formigas em função do tempo é o da alternativa (D).

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA B

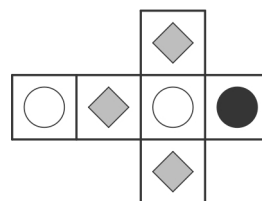
Na tabela abaixo mostramos como analisar as informações do enunciado. Na primeira linha, supomos que Bernardo disse a verdade; na segunda, que Guto disse a verdade e na terceira, que Carlos disse a verdade.

	Guto <i>Não foi o meu</i>	logo	Carlos <i>Foi o meu</i>	logo	Bernardo <i>Não foi o de Guto</i>	logo
1	mentiu	O celular de Guto tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	disse a verdade	O celular de Guto não tocou
2	disse a verdade	O celular de Guto não tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	mentiu	O celular de Guto tocou
3	mentiu	O celular de Guto tocou	disse a verdade	O celular de Carlos tocou	mentiu	O celular de Guto tocou

Nas duas primeiras linhas, chega-se à conclusão de que o celular de Guto tanto tocou quanto não tocou (em vermelho). Essa contradição mostra que o único caso possível é o da terceira linha, ou seja, Carlos disse a verdade e os celulares de Guto e Carlos tocaram.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA B

As probabilidades de obter um quadrado cinza, um círculo branco ou um círculo preto em um lançamento desse dado são, respectivamente, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. A probabilidade de obter dois símbolos iguais em dois lançamentos consecutivos é então $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$; segue que a probabilidade de obter dois símbolos distintos é $1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$.

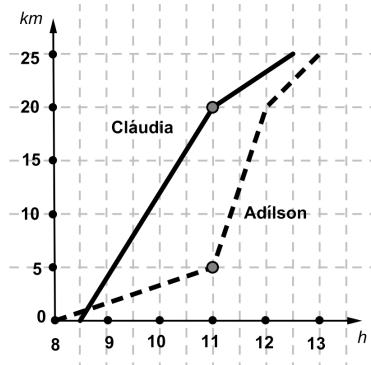


Uma segunda solução é como segue. Os mesmos dois símbolos distintos podem ser obtidos de duas maneiras diferentes em lançamentos consecutivos. Logo, a probabilidade de obtermos um quadrado cinza e um círculo branco é $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, a probabilidade de obtermos um quadrado cinza e um círculo preto é $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ e a probabilidade de obtermos um círculo branco e um círculo preto é $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$. Assim, a probabilidade de obtermos dois símbolos diferentes em lançamentos consecutivos é $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$.

QUESTÃO 15

ALTERNATIVA D

Observamos no gráfico que a distância total percorrida por Cláudia, e também por Adilson, é de 25 km (Cláudia em 4 horas e Adilson em 5 horas). Logo, para determinar o horário do encontro entre eles, devemos determinar em que momento a soma das distâncias percorridas é igual a 25 km. Os pontos assinalados no gráfico mostram que às 11 horas Cláudia e Adilson haviam percorrido, respectivamente, 20 km e 5 km; logo, foi nesse horário que eles se encontraram.



QUESTÃO 16

ALTERNATIVA C

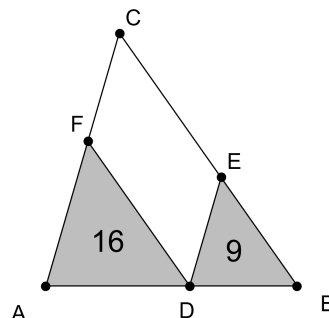
Os triângulos ADF e DEB são semelhantes por terem lados paralelos. A razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança; como $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$,

segue que essa razão é $\frac{4}{3}$. Como $DECF$ é um paralelogramo, temos

$CF = ED$ e daí $\frac{AF}{CF} = \frac{AF}{ED} = \frac{4}{3}$. Os triângulos ABC e ADF são semelhantes;

sua razão de semelhança é $\frac{AC}{AF} = \frac{AF + CF}{AF} = 1 + \frac{CF}{AF} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Logo, a área

do triângulo ABC é $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times 16 = 49$ e a área de $DECF$ é $49 - (16 + 9) = 24$.



Uma segunda solução, que mostra um interessante fato geral, é a seguinte. Os triângulos ADF , DBE e ABC são semelhantes por terem lados paralelos. Sejam A_1 , A_2 e A , respectivamente, suas áreas. Temos

então $\sqrt{\frac{A_1}{A}} = \frac{AD}{AB}$ e $\sqrt{\frac{A_2}{A}} = \frac{DB}{AB}$; somando essas igualdades, obtemos $\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{\sqrt{A}} = \frac{AD + DB}{AB} = 1$. Portanto,

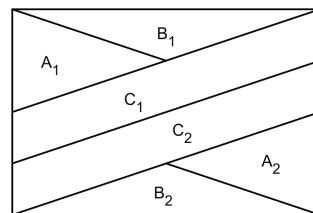
$A = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2 = A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2}$ e então a área de $DECF$ é $A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} - (A_1 + A_2) = 2\sqrt{A_1 A_2}$.

Ou seja, a área do paralelogramo $DECF$ é o dobro da média geométrica das áreas dos triângulos ADF e DBE . No nosso problema temos $A_1 = 16$ e $A_2 = 9$, logo a área de $DECF$ é $2\sqrt{16 \times 9} = 24$.

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA A

Chamemos de n_1 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira, de acordo com as condições do enunciado, usando pelo menos 3 cores dentre as 4 cores disponíveis, e de n_2 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira usando 3 cores diferentes, dentre as 4 que ele dispõe. A resposta ao nosso problema será $n = n_1 - n_2$.



Vamos supor que Paulo pinte a bandeira na sequência $A_1 B_1 C_1 C_2 B_2 A_2$. Pelo princípio multiplicativo, temos $n_1 = 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$. Por outro lado, para cada trio de cores diferentes temos $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes de pintar a bandeira. Como Paulo tem 4 maneiras diferentes de escolher trios de cores diferentes, temos que $n_2 = 4 \times 24 = 96$. Logo $n = 432 - 96 = 336$.

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA D

Vamos representar o número de salas e o número de alunos da Escola Municipal de Pirajuba, no ano de 2011, respectivamente, por s e por a (observe que o valor de a é o mesmo para os anos de 2011, 2012 e 2013). Como o número de alunos por sala nos anos de 2011 e 2012 é o mesmo, temos $\frac{a}{s+5} = \frac{a}{s} - 6$ ou, equivalentemente, $6s^2 + 30s = 5a$. Analogamente, como número de alunos por sala nos anos de 2012 e 2013 também é o mesmo, temos $\frac{a}{s+10} = \frac{a}{s+5} - 5$, ou seja, $s^2 + 15s + 50 = a$. Logo $6s^2 + 30s = 5(s^2 + 15s + 50)$ e concluímos que o número s de salas satisfaz a equação $s^2 - 45s - 250 = 0$, cujas soluções são $s = 50$ e $s = -5$. Como $s > 0$, temos $s = 50$. Logo, o número total de alunos da escola é $a = 50^2 + 15 \times 50 + 50 = 3300$.

Outra solução envolve considerar a média $m = \frac{a}{s}$ de alunos por sala em 2011; observamos que $a = ms$.

Da informação do enunciado sobre 2012 tiramos $m - 6 = \frac{a}{s+5}$, ou seja, $a = (m - 6)(s + 5)$; a informação sobre 2013 é $m - 11 = \frac{a}{s+10}$, ou seja, $a = (m - 11)(s + 10)$. Temos então as equações $ms = (m - 6)(s + 5)$ e $ms = (m - 11)(s + 10)$, que nos dão o sistema linear

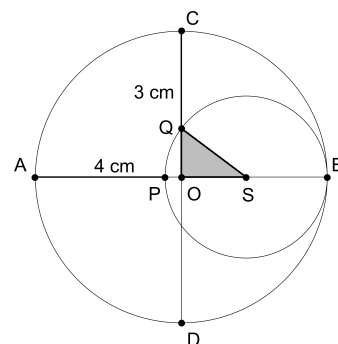
$$\begin{cases} 5m - 6s = 30 \\ 10m - 11s = 110 \end{cases}$$

cuja solução é $s = 50$ e $m = 63$. O número de alunos da escola é então $a = ms = 63 \times 50 = 3300$ (agradecemos ao professor José Luiz dos Santos por sugerir esta solução).

QUESTÃO 19

ALTERNATIVA B

Sejam r e R , respectivamente, os raios das circunferências menor e maior, e S o centro da circunferência menor. Notamos primeiro que $2r = PB = AB - 4 = 2R - 4$, donde tiramos $R = r + 2$. No triângulo retângulo SOQ temos $SQ = r$, $OQ = OC - 3 = R - 3 = r - 1$ e $OS = OB - SB = R - r = 2$. O teorema de Pitágoras nos dá $r^2 = (r - 1)^2 + 2^2 = r^2 - 2r + 5$ e segue que $2r = 5$, ou seja, $r = \frac{5}{2} = 2,5$.

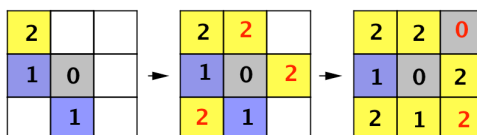


QUESTÃO 20

ALTERNATIVA E

Observamos inicialmente que em qualquer quadradinho, quando o número de trocas de cor é um múltiplo de 3, voltamos à cor original. Assim, para saber, em qualquer momento, qual a cor de um quadradinho, basta conhecer o resto na divisão por 3 do número de trocas de cor. Para isso, identificamos cada quadradinho cinza com o número 0 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 0 na divisão por 3, ou seja, a cor pode não ter sido trocada ou foi trocada em um número múltiplo de 3); identificamos um quadradinho azul com o número 1 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 1 na divisão por 3); e, finalmente, identificamos um quadradinho amarelo com o número 2 (o número de trocas de cor tem resto 2 na divisão por 3).

Observamos agora que, sempre que trocamos a cor de um quadradinho da primeira ou da terceira coluna, trocamos também a cor do quadradinho a seu lado na coluna do meio. Portanto, a soma do número de trocas de cor dos quadradinhos de uma mesma linha, que estão na primeira e terceira colunas, é igual ao número de trocas de cor do quadradinho da coluna do meio que está nesta mesma linha. Em particular, o resto da divisão do número de trocas de um quadradinho da coluna do meio por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos restos das divisões por 3 do número de trocas de cores dos quadradinhos vizinhos que estão na primeira e na terceira coluna da mesma linha. Comentário análogo vale para os quadradinhos da linha do meio. Essas observações nos permitem reconstruir o quadriculado completo, conforme a figura abaixo.



O problema não acaba aqui, pois ainda não mostramos que esse quadriculado pode, de fato, ser obtido por uma sequência de Adão. Que isso de fato acontece pode ser visto abaixo.

