

N2Q1

- a) Temos da tabela $C \rightarrow 3$, $A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 2$, $I \rightarrow 9$, $D \rightarrow 4$ e $E \rightarrow 5$. O número da palavra CABIDE é então $3 \times 1 \times 2 \times 9 \times 4 \times 5 = 1080$.
- b) A decomposição de 455 em fatores primos é $455 = 5 \times 7 \times 13$; as letras correspondentes a 5, 7 e 13 são, respectivamente, E, G e M. Como A corresponde a 1, qualquer palavra formada pelas letras A, E, G e M é uma solução do problema; por exemplo, GEMA.
- c) A fatoração de 2013 em fatores primos é $2013 = 3 \times 11 \times 61$. Isso mostra que em qualquer produto cujo resultado seja 2013 aparece um fator que é múltiplo de 61. Como o maior número associado a uma letra é 26, concluímos que não é possível escrever uma palavra cujo número associado seja 2013.

N2Q2 – Solução

Nos itens (a) e (b), a figura pode ser completada de várias maneiras; seguem abaixo um exemplo para cada item.



- c) Se o número n aparece em uma linha de uma pilha, na linha imediatamente abaixo deve aparecer pelo menos um número maior que n , pois não é possível escrever n como a diferença de dois números menores ou iguais a n . Assim, se o 5 aparece no topo de uma pilha, na linha inferior deve aparecer algum algarismo maior do que 5, na linha seguinte algum algarismo maior que 6 e assim por diante. Como o maior algarismo é 9, segue que uma pilha com o 5 no topo terá no máximo cinco linhas; mais geralmente, uma pilha com o algarismo n no topo terá no máximo $9 - (n - 1)$ linhas.

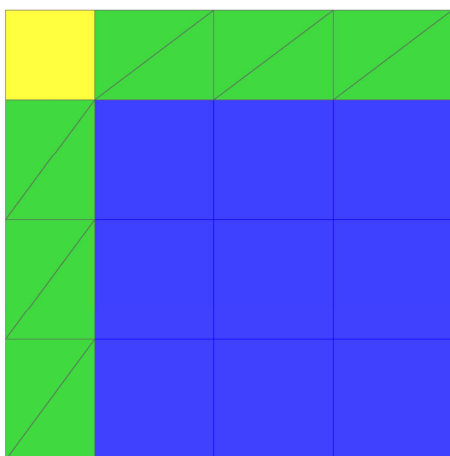
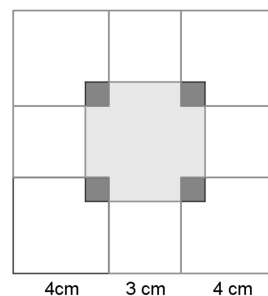
N2Q3

Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ e as verdes têm $\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

a) O hexágono montado por Dafne é composto por duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 6 + 9 + 16 = 37 \text{ cm}^2$.

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4 + 3 + 4 = 11 \text{ cm}$, cuja área é $11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 100 \text{ cm}^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 100 = 21 \text{ cm}^2$.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradrinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5 \times 5 - 4 \times 1 \times 1 = 21 \text{ cm}^2$.



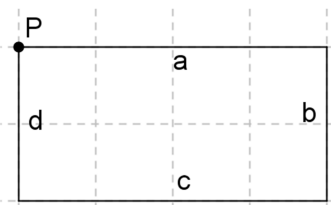
c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15 , como pedido, é mostrado na figura ao lado.

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2 , ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

N2Q4

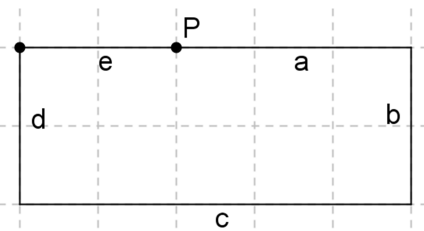
a) A assinatura geométrica de 123456 aparece na figura ao lado.

b) Seja $abcd$ um número com quatro algarismos a, b, c e d não nulos. A assinatura geométrica de $abcd$ possui quatro segmentos consecutivos de comprimentos a, b, c e d , traçados de acordo com o enunciado. Ela será fechada se e



somente se esses traços formarem um retângulo, ou seja, se e somente se $a = c$ e $b = d$. Temos as escolhas de 1 a 9 para $a = c$ e também para $b = d$, num total de $9 \times 9 = 81$ escolhas; segue que temos 81 números de quatro algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.

c) Seja $abcde$ um número com cinco algarismos a, b, c, d e e não nulos. Como no item anterior, a assinatura geométrica de $abcde$ será fechada se e somente os segmentos de comprimento a, b, c, d e e formarem um retângulo como na figura ao lado, ou seja, se e somente se $a + e = c$ e $b = d$. Como no item anterior, temos as escolhas de 1 a 9 para $b = d$.



Vamos agora contar de quantas maneiras é possível escolher a, c e e de modo que $a + e = c$. Exceto para o caso $c = 1$, quando não há valores possíveis para a e e , podemos escolher valores de 1 até $c - 1$ para a e, em cada caso, o valor de e fica determinado como $c - a$. Em outras palavras, para cada c é possível escolher a e e tais que $a + e = c$ de $c - 1$ maneiras diferentes (notamos que no caso $c = 1$ temos $c - 1 = 0$). Como c varia de 1 a 9, o número de escolhas possíveis para a e e é $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.

Finalmente, segue do princípio multiplicativo que temos $9 \times 36 = 324$ números de cinco algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.

N2Q5

- a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.
- b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

- c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:
- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
 - se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
 - se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
 - se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

- d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é

$$\frac{2^9}{2} = 2^8.$$

N2Q6

- a) Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n = 8a + r = 7b + s$ onde $0 \leq r \leq 7$ e $0 \leq s \leq 6$; segue que $A(n) = a + r$ e $B(n) = b + s$. Por exemplo, $14 = 8 \times 1 + 6 = 7 \times 2 + 0$, donde $A(14) = 1 + 6 = 7$ e $B(14) = 2 + 0 = 2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(n)$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$B(n)$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

- b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228		229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
$A(n)$	32		33	34	35	29	30	31	32	33	34	35	36	30
$B(n)$	36		37	38	33	34	35	36	37	38	39	34	35	36

Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro; por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

- c) Das expressões $n = 8a + r = 7b + s$ temos $A(n) = a + r = \frac{n-r}{8} + r = \frac{n+7r}{8}$ e $B(n) = b + s = \frac{n-s}{7} + s = \frac{n+6s}{7}$. Desse modo, $A(n) = B(n)$ se escreve como $\frac{n+7r}{8} = \frac{n+6s}{7}$; simplificando essa expressão chegamos a $n = 49r - 48s$. O maior valor possível para $49r - 48s$ é obtido colocando $r = 7$ e $s = 0$, ou seja, o número procurado é $d = 49 \times 7 = 343$.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que $A(n) < B(n)$ para $n > 343$.