Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.

8ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2012
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 3
Ensino Médio

2ª FASE – 15 de setembro de 2012

Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)

Complemento | Bairro

Cidade | UF | CEP

Endereço eletrônico (email) | DDD | Telefone

Assinatura | DDD | Telefone (outro)

Parabéns pelo seu desempenho na 1ª Fase da OBMEP. É com grande satisfação que contamos agora com sua participação na 2ª Fase. Desejamos que você faça uma boa prova e que ela seja um estímulo para aumentar seu gosto e sua alegria em estudar Matemática.

Um abraço da Equipe da OBMEP!

Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

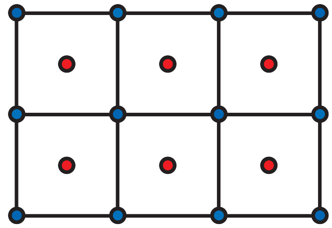
INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta.
10. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador.
11. Não escreva nos espaços sombreados.

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional
Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional

impa
Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

1. Uma empresa fabrica painéis luminosos retangulares divididos em quadrados de 1 metro de lado. No centro de cada quadrado é colocada uma lâmpada vermelha e nos vértices dos quadrados são colocadas lâmpadas azuis. A figura ao lado mostra que um painel de 2 metros por 3 metros tem 6 lâmpadas vermelhas e 12 azuis, das quais 10 estão em sua borda.



a) Quantas lâmpadas vermelhas há em um painel de 5 metros por 8 metros?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Quantas lâmpadas azuis há em um painel de 5 metros por 8 metros?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Quantas lâmpadas estão na borda de um painel no qual foram colocadas 72 lâmpadas vermelhas e 90 azuis?

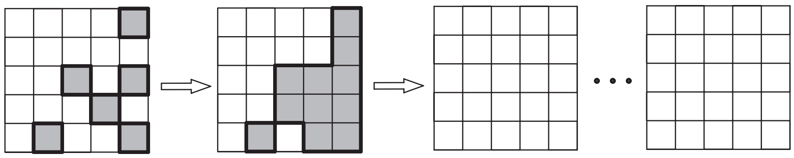
Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

2. Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



1º estágio | 2º estágio | 3º estágio | último estágio

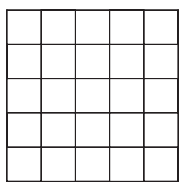
Correção Regional | Correção Nacional

O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item **a**.

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item **a**.

Correção Regional | Correção Nacional

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



Correção Regional | Correção Nacional

d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Correção Regional | Correção Nacional

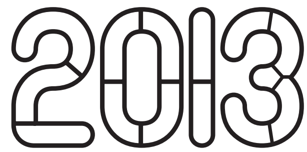
e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

8ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2012
Somando novos talentos para o Brasil

3. Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

Correção Regional | Correção Nacional

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

Correção Regional | Correção Nacional

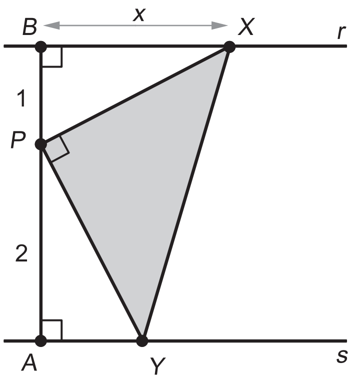
c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

Correção Regional | Correção Nacional

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional



4. Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P.

a) Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes.

Correção Regional | Correção Nacional

b) Calcule a área do triângulo XPY em função de x.

Correção Regional | Correção Nacional

c) Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$?

Correção Regional | Correção Nacional

d) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

5. Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda caixa.

a) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa seja amarela?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?

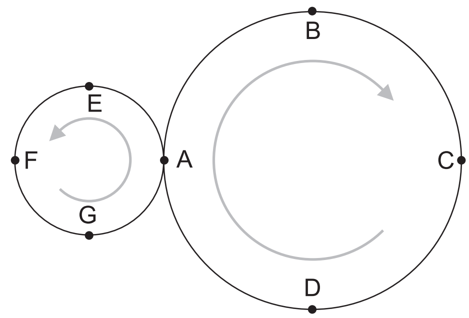
Correção Regional | Correção Nacional

c) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1?

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

6. Uma pista de ciclismo é formada por duas circunferências tangentes. O comprimento da maior é 4000 m e o da menor é 2000 m; os pontos marcados dividem cada circunferência em quatro arcos iguais. Dois ciclistas percorrem esse circuito com velocidade constante, no sentido das setas, e trocam de circunferência ao passar por A. Cada um deles percorre a circunferência menor em 8 minutos.



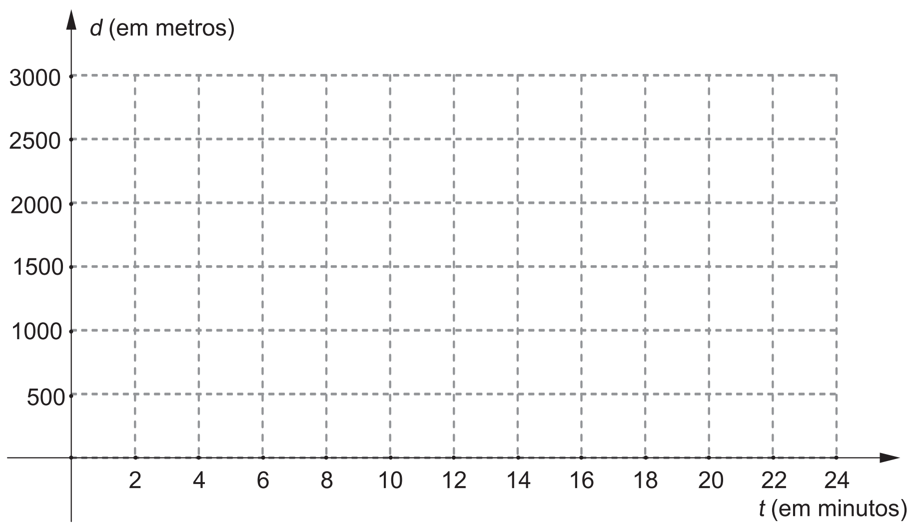
a) Suponha que os ciclistas partam ao mesmo tempo dos pontos B e D. Quanto tempo após a partida eles se encontram pela primeira vez?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Suponha que os ciclistas partam ao mesmo tempo e se encontrem 20 minutos após a partida. Quais foram seus pontos de partida?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Dizemos que a *distância (d) entre os ciclistas* é o comprimento do menor caminho entre eles ao longo da pista, independente do sentido do percurso. Por exemplo, se os ciclistas estão nos pontos G e D, a distância entre eles é 1500 m, correspondente aos arcos *GA* e *AD*. Suponha que os ciclistas partam ao mesmo tempo dos pontos G e D e esboce o gráfico da distância entre os ciclistas, em função do tempo, até que eles retornem aos seus pontos de partida.



Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional