



1. Em cada casa de um quadriculado  $4 \times 4$  deve ser colocado um dos números 1, 3, 7 e 8, de modo que em cada linha, coluna ou diagonal apareçam os quatro números.

a) Qual é a soma dos números nos quatro quadradinhos centrais quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?


Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Suponha que 1, 3, 7 e 8 sejam colocados na diagonal, como na figura. De quantas maneiras é possível completar o quadriculado de acordo com o enunciado?

1			
	3		
		7	
			8

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Qual é o maior valor possível para a soma dos números que aparecem nas casas cinzentas quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?


Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

2. Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

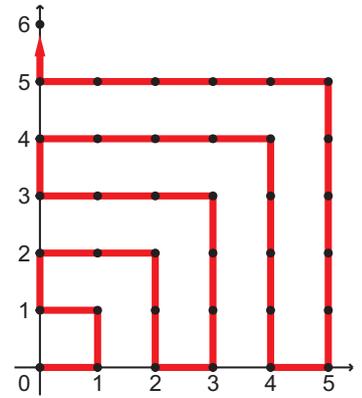
d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

3. A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto  $(a,b)$  é chamado de *lonjura* de  $(a,b)$ ; por exemplo, a lonjura de  $(1,2)$  é 5 cm.



a) Determine a lonjura dos pontos  $(3,2)$  e  $(0,4)$ .

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são  $(0,0)$ ,  $(n,0)$ ,  $(n,n)$  e  $(0,n)$ ?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que a lonjura do ponto  $(n,n)$  é  $n^2 + n$ .

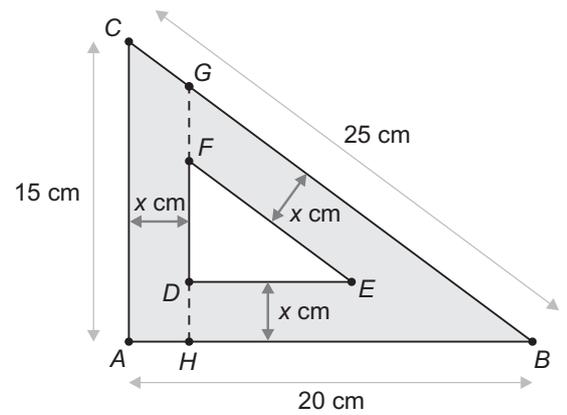
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Qual é o ponto cuja lonjura é 425?

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
	Correção Regional	Correção Nacional

4. Na figura, os lados do triângulo  $DEF$  são paralelos aos lados do triângulo retângulo  $ABC$ . Os pontos  $H, D, F$  e  $G$  estão alinhados e  $0 \leq x \leq 5$ .

a) Calcule o comprimento de  $GH$  em função de  $x$ .

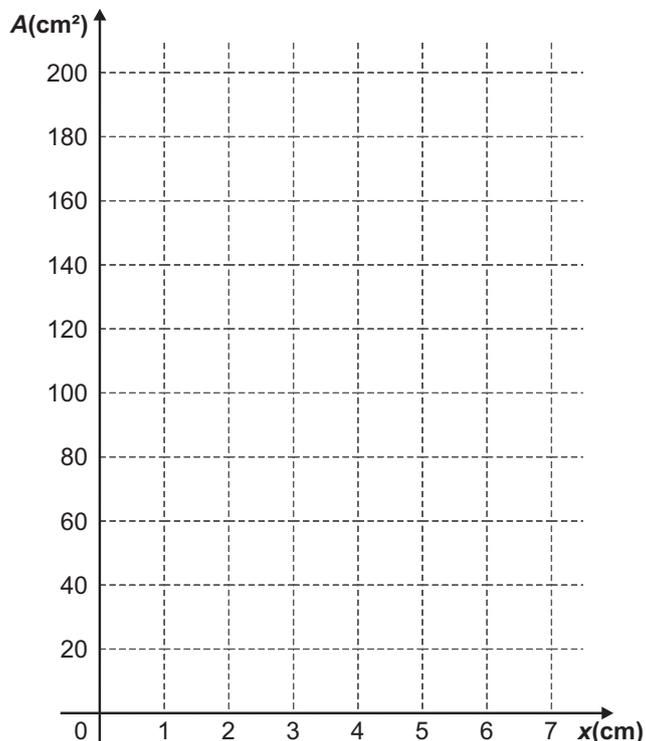


Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Mostre que  $CG = FG = \frac{5x}{4}$  cm.

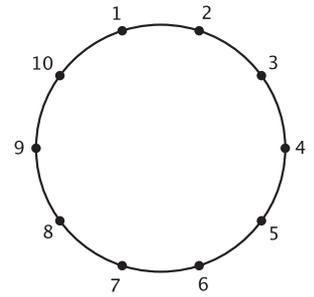
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Faça o gráfico da área  $A$  do triângulo  $DEF$  em função de  $x$ .



	Correção Regional	Correção Nacional
<b>TOTAL</b>	Correção Regional	Correção Nacional

5. Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

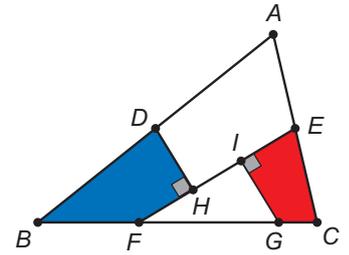
Um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

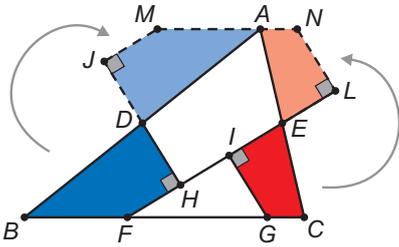
c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

6. Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo  $ABC$  dividido em quatro partes; nesses triângulos,  $D$  é ponto médio de  $AB$ ,  $E$  é ponto médio de  $AC$  e  $FG$  mede  $\frac{1}{2}BC$ .

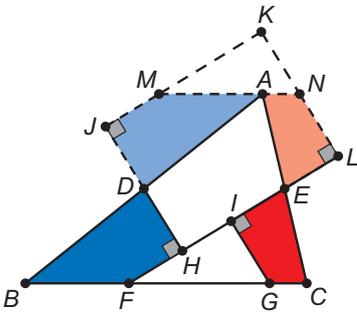


a) Os quadriláteros  $DJMA$  e  $ELNA$  são obtidos girando de  $180^\circ$  os quadriláteros  $DHFB$  e  $EIGC$  em torno de  $D$  e  $E$ , respectivamente. Explique por que os pontos  $M$ ,  $A$  e  $N$  estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo  $M\hat{A}N$  é igual a  $180^\circ$ .



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Na figura, o ponto  $K$  é a interseção das retas  $JM$  e  $LN$ . Explique por que os triângulos  $FGI$  e  $MNK$  são congruentes.



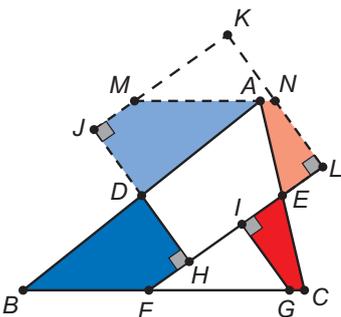
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

Os itens acima mostram que  $HJKL$  é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo  $ABC$  foi dividido.

c) Mostre que  $LH = EF$ .

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Na figura o triângulo  $ABC$  tem área 9 e  $HJKL$  é um quadrado. Calcule o comprimento de  $EF$ .



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

R A S C U N H O

Operacionalização:

 Fundação Carlos Chagas