2ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2006

Somando novos talentos para o Brasil

Nível 3

Ensino Médio

2ª FASE – 18 de novembro de 2006

Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.

Parabéns pelo seu desempenho na 1ª Fase da OBMEP. É com grande satisfação que contamos agora com sua participação na 2ª Fase. Desejamos que você faça uma boa prova e que ela seja um estímulo para aumentar seu gosto e alegria em estudar Matemática.

Um abraço da equipe da OBMEP!

Ministério da Ciência e Tecnologia **Ministério da Educação** impa SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta acima estão corretos. Escreva seus dados (nome e endereço completos) e assine no local indicado. Assine também a lista de presença.
2. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
3. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 25 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
4. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever soluções na folha de rascunho.
5. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
6. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
7. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta.
8. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas além do aplicador.
9. Não escreva nos espaços sombreados.

"Não quero ter a terrível limitação de quem vive apenas do que é possível fazer sentido. Eu não: quero é uma verdade inventada."

Os nomes usados nesta prova são de personagens da obra da grande escritora brasileira Clarice Lispector.

Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno

Complemento

CEP

Cidade

UF

DDD

Telefone (opcional)

Assinatura

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional							
	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Nacional							

(1) Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem até 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

(a) Quanto paga quem come 350 gramas? E quem come 720 gramas?

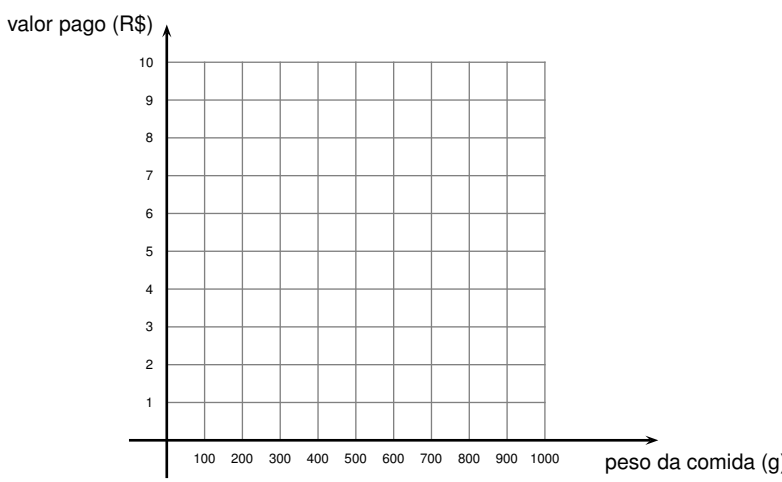
(b) Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

(c) Desenhe o gráfico que representa o valor a ser pago em função do peso da comida. Marque nesse gráfico os pontos que representam a situação do item (b).

(a)

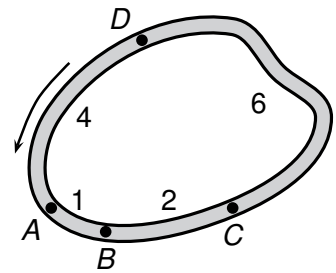
(b)

(c)



TOTAL

(2) A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

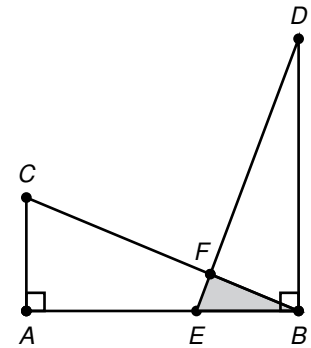
(a)

(b)

(c)

TOTAL

(3) Na figura, os triângulos ABC e BDE são congruentes e os ângulos $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{B}E$ são retos.



(a) Ache a razão entre a área do triângulo BDF e a área do quadrilátero $AEFC$.

(b) Determine a medida do ângulo $B\widehat{F}E$.

(c) Sabendo que $AB = 12$ e $AC = 5$, calcule a área do triângulo EFB.

(a)

(b)

(c)

TOTAL

(4) O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

(d) Quantos quadrados especiais existem?

TOTAL

(5)

(a) Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em dois lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?

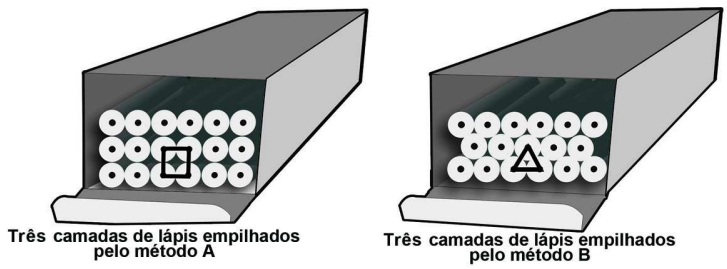
(b) Catarina, por sua vez, escreveu em cada face de um cubo um número inteiro positivo. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nas três faces que se encontram nesse vértice. Se a soma dos números escritos nos vértices é 105, qual é a soma dos números escritos nas faces?

(a)

(b)

TOTAL

(6) Rodrigo coloca lápis cilíndricos de 15 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro em caixas na forma de bloco retangular com base de dimensões 6 cm por 15 cm. Ele empilha os lápis nas caixas usando dois métodos diferentes, ilustrados a seguir:



No método *A*, os centros dos círculos formam quadrados e, no método *B*, triângulos equiláteros, como na figura.

(a) Mostre que cada camada de lápis empilhados pelo método *B*, exceto a primeira, acrescenta $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm à altura da pilha.

Para resolver os próximos itens, use a aproximação $0,87$ para $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Rodrigo quer colocar 90 lápis em uma caixa. Qual a menor altura que a caixa deve ter se ele usar o método *A*? E se ele usar o método *B*?

(c) Olímpico mostrou a Rodrigo como empacotar 90 lápis em uma caixa de altura $14,5$ cm. Como isso pode ser feito?

(a)

(b)

(c)

TOTAL

RASCUNHO