

Somando novos talentos para o Brasil

## Nível

7ª e 8ª séries (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental Cole agui a etiqueta com os dados do aluno.

## 2ª FASE - 24 de outubro de 2009

Parabéns pelo seu desempenho na 1ª Fase da OBMEP. É com grande satisfação que contamos agora com sua participação na 2ª Fase. Desejamos que você faça uma boa prova e que ela seja um estímulo para aumentar seu gosto e sua alegria em estudar Matemática.

Um abraço da Equipe da OBMEP!





Ministério da Ministério Ciência e Tecnologia da Educação



## **INSTRUÇÕES**

- 1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao fiscal imediatamente.
- Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro abaixo. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
- 3. Lembre-se de assinar o quadro abaixo e a lista de presença.
- 4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- 5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
- 6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
- 7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
- 8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- 9. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta.
- 10. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador.
- 11. Não escreva nos espaços sombreados.

"Espera, espera, tive uma idéia e uma idéia não se deixa fugir."

Eurosy des La Esseria

Homenagem da OBMEP ao grande escritor brasileiro Euclides da Cunha, por ocasião do centenário de sua morte.

Nome completo do alun	no							
Endereço completo do	aluno (Rua, Av., nº)							
Complemento		Bairro						
Cidade					UF	CEP		
Endereço eletrônico (email)				DDD	DDD Telefone			
	•							
					DDD	Telefon	e (outro)	
Assinatura								
Preencha		1	2	3	4	5	6	Total
e confira os dados	Correção Regional	Correção Regional						
acima com muita atenção!		1	2	3	4	5	6	Total
		Correção						



(1) Um número inteiro positivo esconde outro número quando, apagando alguns de seus algarismos, aparece o outro. Por exemplo, o número 123 esconde os números 1, 2, 3, 12, 13 e 23, mas não esconde 32, 123 e 213.



(a) Qual é o maior número de três algarismos escondido por 47239?





(b) Qual é o menor número que esconde simultaneamente 2009 e 9002?

(c) Ache um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e cujo algarismo das unidades é 3.



(2) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

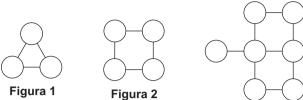
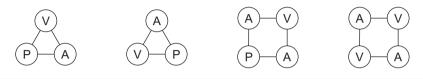


Figura 3

Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?





(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?



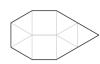


**(3)** Um polígono convexo é *elegante* quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Ao lado, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.









5 lados 6 lados 7 lados

(a) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

Em um polígono convexo todos os ângulos internos são menores que 180°.

Correção Regional Correção Nacional

(b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

Correção Regional

Correção Nacional

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é (n – 2)×180°.

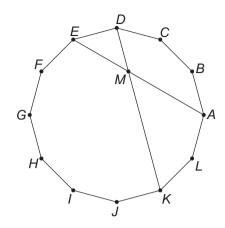
c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.

Correção Regional Correção Nacional

(d) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.







- **(4)** O polígono *ABCDEFGHIJKL* é regular e tem doze lados.
- (a) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?

Em um polígono regular todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos internos têm a mesma medida.



(b) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK. Quais são as medidas dos ângulos  $\widehat{MDE}$  e  $\widehat{DME}$ ?





(c) Qual é a medida do ângulo  $\widehat{CBM}$ ?





(d) Prove que os pontos B, M e F estão alinhados.





- (5) Um número inteiro n é simpático quando existem inteiros positivos a, b e c tais que a < b < c e  $n = a^2 + b^2 c^2$ . Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois  $1 = 4^2 + 7^2 8^2$  e  $2 = 5^2 + 11^2 12^2$ .
- (a) Verifique que  $(3x+1)^2+(4x+2)^2-(5x+2)^2$  é igual a 2x+1, qualquer que seja x.



(b) Encontre números inteiros m e n tais que  $(3x-m)^2+(4x-n)^2-(5x-5)^2=2x$ , qualquer que seja x.



Correção Nacional

(c) Mostre que o número 4 é simpático.



Correção Nacional

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.





(6) No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas	
2 3	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	1 e 6	
2 2	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	1, 2, 4 e 3	

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

1 3 5 7 9

**Tabuleiro** 

1 3 5 7

Correção Regional Nacional

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2 100.

Jogadas

Correção Regional Correção Nacional

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção Regional Correção Nacional

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 101.



