

(1) Um número inteiro positivo *esconde* outro número quando, apagando alguns de seus algarismos, aparece o outro. Por exemplo, o número 123 esconde os números 1, 2, 3, 12, 13 e 23, mas não esconde 32, 123 e 213.



(a) Qual é o maior número de três algarismos escondido por 47239?

Correção Regional

(b) Qual é o menor número que esconde simultaneamente 2009 e 9002?

Correção Regional

(c) Ache um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e cujo algarismo das unidades é 3.

Correção
Regional

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
-------	-------------------	-------------------

(2) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que **bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes**.

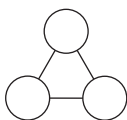


Figura 1

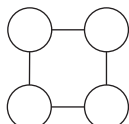


Figura 2

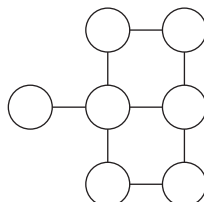
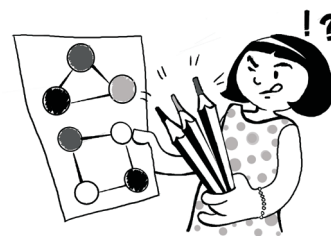
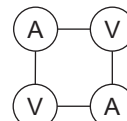
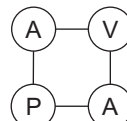
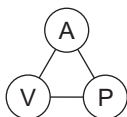
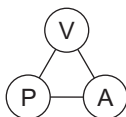


Figura 3



Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

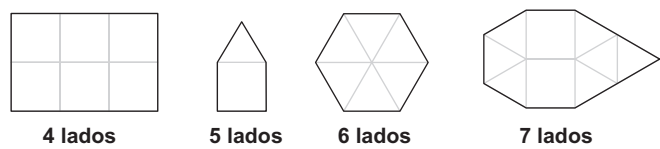
(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
	Correção Regional	Correção Nacional

(3) Um polígono convexo é *elegante* quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Ao lado, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



(a) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

Em um polígono convexo todos os ângulos internos são menores que 180°.

Correção Regional

Correção Nacional

(b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

Correção Regional

Correção Nacional

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \times 180^\circ$.

c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.

Correção Regional

Correção Nacional

(d) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

Correção Regional

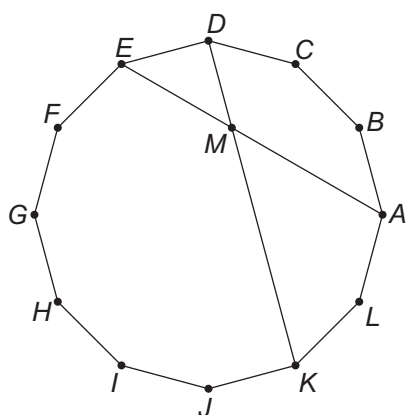
Correção Nacional

TOTAL

Correção Regional

Correção Nacional

Em um polígono regular todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos internos têm a mesma medida.



(4) O polígono $ABCDEFGHIJKL$ é regular e tem doze lados.

(a) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?

Correção
Regional

Correção
Nacional

(b) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK . Quais são as medidas dos ângulos $\widehat{MDE}$ e $\widehat{DME}$?

Correção
Regional

Correção
Nacional

(c) Qual é a medida do ângulo $\widehat{CBM}$?

Correção
Regional

Correção
Nacional

(d) Prove que os pontos B , M e F estão alinhados.

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

(5) Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a , b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2$ é igual a $2x + 1$, qualquer que seja x .

Correção Regional	Correção Nacional

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 = 2x$, qualquer que seja x .

Correção Regional	Correção Nacional

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

Correção Regional	Correção Nacional

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

Casas
vizinhas são
casas que têm
um lado comum.

(6) No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Tabuleiro	Partida completa			Jogadas																										
2 3	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	3	5	2	4	6	1 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	3	5	2	4	6	6 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	3	5	2	4	6	1 e 6						
1	3	5																												
2	4	6																												
1	3	5																												
2	4	6																												
1	3	5																												
2	4	6																												
2 2	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	1 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	2 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	4 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	3 →	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	1, 2, 4 e 3
1	3																													
2	4																													
1	3																													
2	4																													
1	3																													
2	4																													
1	3																													
2	4																													
1	3																													
2	4																													

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

Correção
Regional

Correção
Nacional

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2 100.

Correção
Regional

Correção
Nacional

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção
Regional

Correção
Nacional

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

RASCUNHO